

# Diplomarbeit

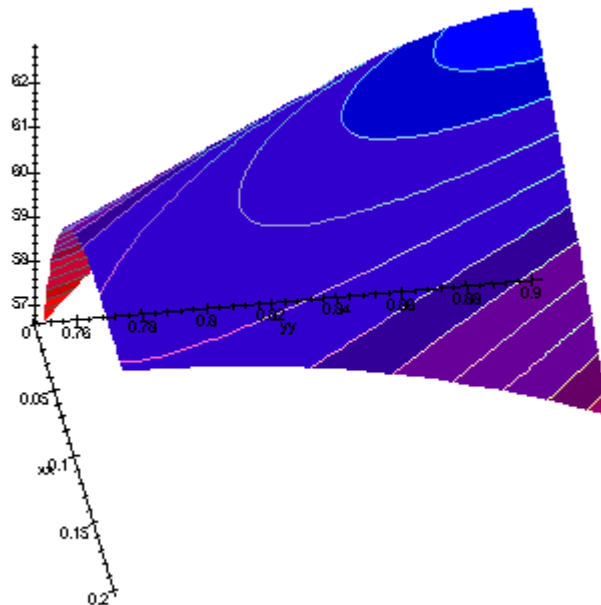
zur Erlangung des akademischen Grades

Dipl.–Math. oec. Univ.

an der mathematisch - naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Universität Augsburg

Thema:

## Collateralisation



Erstgutachter: Prof. Antony R. Unwin, Ph.D.  
(Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse)  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Friedrich Pukelsheim

Vorgelegt von: Gerhard Schweimayer im Juli 1998  
Matrikelnummer 449858  
Birkenstraße 2  
86343 Königsbrunn



# Vorwort

---

## Vorwort

Diese Diplomarbeit wurde im Bereich Global Markets (Middle Office) der Dresdner Bank in Frankfurt am Main angefertigt. Die Aufgabe lautete, für den besicherten Handel von OTC-Produkten, Collateralised Trading, eine Portfoliooptimierung zu etablieren und ein geeignetes Risikomaß einzuführen. Bei der Darlegung des Stoffes versucht die Diplomarbeit beiden Seiten, der Mathematik und der finanztheoretischen Hintergründe, gerecht zu werden.

Besonders bei der Portfoliooptimierung war es wichtig, die betriebswirtschaftlichen Abläufe des Collateralised Trading und die dahinterstehende Problematik zu erkennen. Dabei unterstützten mich, in der Dresdner Bank, Herr Andreas Kraft und Herr Ulf Müller-Späth. Für die hervorragende Hilfe möchte ich den beiden Mitarbeitern meinen Dank aussprechen. Auch mein Betreuer, Herr Dr. Matthias Leclerc, stand mir, trotz seines reich gefüllten Terminkalenders, stets mit konstruktivem Rat und Hinweisen zur Seite.

Ebenso fand mein Betreuer in der Universität Augsburg, Herr Prof. Antony Unwin, Ph.D., immer Zeit, mit seinen sehr fachkundigen und praxisorientierten Anregungen, bei der Gestaltung und Durchführung der Diplomarbeit zu helfen.

Abschließend bedanke ich mich noch bei meiner Freundin Lorena Tofan und meinen Eltern, Eleonore und Günter Schweimayer, für ihre Unterstützung, während meiner Zeit in Frankfurt.

Frankfurt am Main, Juli 1998

Gerhard Schweimayer

---

## Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis.....	III
Symbolverzeichnis.....	V
Abbildungsverzeichnis.....	VII
1. Einführung.....	1
1.1. Was ist Collateralised Trading.....	1
1.1.1. Die im Portfolio enthaltenen Bestandteile.....	2
1.1.2. Theoretische Grundlagen.....	6
2. Kosten- und Varianzminimierung.....	12
2.1. Modellarten des Portfolios.....	12
2.1.1 Verwendetes Portfoliomodell.....	12
2.1.2 Markowitzmodell.....	14
2.2. Minimierung im verwendeten Modell.....	15
2.2.1 Optimimale Neuerstellung eines Portfolios.....	15
2.2.2 Optimale Portfolioumschichtung.....	23
2.2.3 Kanonische Form des Umschichtungsproblems.....	27
2.2.4 Modelldiskussion.....	29
2.3. Algorithmus und Beispielrechnung.....	32
2.3.1 Beispiel Kundenportfolio.....	33
2.3.2 Szenarien.....	38
2.3.3 Ergebnisse.....	40
3. Value at Risk für Collateralised Trading.....	44
3.1 Begriffserläuterung.....	44
3.2 Portfoliomodell und dynamische Kursmodelle.....	48
3.2.1 ARMA Modell.....	49
3.2.2 GARCH Modell.....	50
3.2.3 SV Modell.....	51
3.2.4 Modelle aus der Kapitalmarkttheorie.....	52
3.3 Modellwahl und –vereinfachung.....	55
3.3.1 Vereinfachung des allgemeinen GARCH Modells.....	56
3.3.2 Zeitreihenanalyse.....	59

---

3.4 Schätzen der Modellparameter.....	67
3.4.1 Modelldiskussion.....	67
3.4.2 Parameteralgorithmus.....	70
3.5 Simulation.....	72
3.5.1 Die verwendete Software.....	73
3.5.2 Beispielsimulation.....	75
3.5.3 Ergebnisse.....	79
3.5.4 Methodenvergleich.....	81
4. Schluß.....	83
5. Anhang.....	84
5.1 Anhang zu Kapitel 1.....	84
5.2 Anhang zu Kapitel 2.....	84
5.2.1 SLP-Algorithmus in Maple.....	84
5.2.2 Historische Varianz-Kovarianz-Matrix mit Maple.....	88
5.2.3 Kostenfaktoren.....	91
5.2.4 Restriktionen in Matrixform.....	92
5.3. Anhang zu Kapitel 3.....	94
5.3.1 Empirische ACF und PACF in Maple.....	94
5.3.2 Herleitung der Dichte von $t(v)$ .....	96
5.3.3 Summenformel für den rekursiven Ausdruck von $h_t$ .....	97
Literaturverzeichnis.....	99

---

## Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
ACF	Autocorrelation Function
APT	Abitrage Pricing Theory
B&S	Black and Scholes
BAKred	Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
CAPM	Capital Asset Pricing Model
d.h.	das heißt
Def.	Definition
ff.	fortfolgend
FX	Foreign Exchange
GARCH	Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
IM	Initial Margin
KWG	Kreditwesengesetz
LIBOR	London Interbank Offered Rate; variabler Referenzzinssatz des Londoner Börsenplatzes.
m.a.W.	mit anderen Worten
MLE	Maximum Likelihood Estimation
MTA	Minimum Transfer Amount
Mw	Marktwert
Nom	Nominal(wert)
NYSE	New York Stock Exchange
OTC	Over the Counter
PACF	Partial Autocorrealtion Function
PV	Present Value, zu deutsch Marktwert
QMLE	Quasi Maximum Likelihood Estimation
S&P	Standard and Poors
S.	Seite

---

TL	Threshold Level
u.a.	unter anderem
u.s.w.	und so weiter
VaR	Value at Risk; Ein Risikomaß, das auf dem $1-\alpha$ Quantil einer Verteilung basiert.
vB	vereinbarter Betrag
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

Symbolverzeichnis

$E[X]$ oder $E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$
$V[X]$ oder $V(X)$	Varianz der Zufallsvariablen $X$
$c(X)$	Kosten des Marktwertvektors $X$
$\text{Min}_X(f(X))$	Wert von $X$ , bei dem $f(X)$ minimal wird.
$\forall$	„Für alle“
$\Delta X$	Deltaänderung von $X$
$\Sigma_{ij}$	Varianz-Kovarianz-Matrix
$H_t$	Varianz-Kovarianz-Matrix in Abhängigkeit der Zeit (GARCH Modelle)
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Raum reeller Matrizen mit $n$ Zeilen und $m$ Spalten.
$E^{n,n}$	Einheitsmatrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$
$\in$	„Element von“
$a := b$	Die Größe $a$ ist definiert durch $b$
$N(\mu, \Sigma_{ij})$	Mehrdimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\mu$ und Varianz-Kovarianz-Matrix $\Sigma_{ij}$ .
$N(\mu, H_t)$	Analog zu oben, aber mit zeitabhängiger Varianz-Kovarianz-Matrix $H_t$ .
$\{x_t\}$	Stochastischer Prozeß der (Wertpapier)-Kurse
$\{y_t\}$	Stochastischer Prozeß der logarithmierten Kurse oder Kursrenditen
$(x_t)$ und $(y_t)$	Die Zeitreihen als Realisationen der entsprechenden stochastischen Prozesse.
Lag $k$	Zeitdifferenz $k$ , z.B. zwischen zwei Kursen $x_t$ und $x_{t+k}$ .
$\rho_{ij}$ und $\hat{\rho}_{ij}$	Die Korrelation und ihr historischer Schätzer
$\sigma_{ij}$ und $\hat{\sigma}_{ij}$	Die Kovarianz und ihr historischer Schätzer
$r(k)$	Empirische ACF zum lag $k$
$pr(k)$	Empirische PACF zum lag $k$
$\ln(x)$	Natürlicher Logarithmus von $x$
$t^*(v)$	Gängige $t$ -Verteilung mit $v$ Freiheitsgraden
$t(v)$	Standardisierte $t$ -Verteilung mit Varianz 1 und $v$ Freiheitsgraden.



---

$t(\mu, h, v)$	(Standardisierte) t-Verteilung mit Erwartungswert $\mu$ , Varianz $h$ und $v$ Freiheitsgraden.
$\text{VaR}(P, \alpha, T)$	Value at Risk für Portfolio $P$ mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ bei einem Zeithorizont von $T$ Tagen.
$\text{AR}(p)$	Autoregressiver Prozeß der Ordnung $p$ .
$\text{MA}(q)$	Moving Average Prozeß der Ordnung $q$
$\text{ARMA}(p,q)$	Prozeß der aus einem $\text{AR}(p)$ - und einem $\text{MA}(q)$ -Prozeß additiv zusammengefügt ist.
$u_t Y_{t-1}$	Zufallsvariable $u$ in Abhängigkeit des Zeitpunktes $t$ , bei gegebener Informationsmenge $Y_{t-1}$ .

**Abbildungsverzeichnis**

Abb. 1.1.1.1	Cross Currency Swap	2
Abb. 1.1.1.2	FX Spot	3
Abb. 1.1.1.3	FX Option	4
Abb. 1.1.2.1	Fully Collateralised Limit mit Initial Margin	7
Abb. 1.1.2.2	Partially Collateralised Limit mit Initial Margin	7
Abb. 1.1.2.3	Partially Collateralised Limit mit Threshold Level	8
Abb. 1.1.2.5	Portfoliozerlegung	11
Abb. 2.1.1.1	Portfoliomodell	12
Abb. 2.2.4.2.1	Restriktionen	30
Abb. 2.3.1.1	OTC-Kurswerte mit und ohne Korrektur	35
Abb. 2.3.3.2.1	Scatterplots	41
Abb. 3.2.1	Value at Risk	45
Abb. 3.2.4.1	Logarithmische Transformation	52
Abb. 3.3.2.3.1	(ACF, PACF) Tägliche Kurse der Microsoftaktie	61
Abb. 3.3.2.3.2	(ACF, PACF) Tägliche Wechselkurse (DM/\$)	62
Abb. 3.3.2.3.3	(ACF, PACF) Tägliche Zinssätze 10-jähriger Treasury Bonds	63
Abb. 3.3.2.3.4	Q-Q-Plot für die Zeitreihe des NYSE Composite Index	64
Abb. 3.3.2.3.5	Vergleich von Dichten	65
Abb. 3.4.1.2	Varianzprozeß	69
Abb. 3.4.2.1	Zeitreihenvergleich	71
Abb. 3.5.3.1	Simulierte Verteilung des Nettoexposures	79
Abb. 3.5.3.2	Abhängigkeit des Nettoexposures vom Underlying S	79
Abb. 3.5.3.3	Abhängigkeit des Nettoexposures von der Spot Rate $s_1$	80
Abb. 3.5.4.1	VaR-Vergleich	82

## 1. Einführung

Als Motivation für diese Diplomarbeit, die bei der Dresdner Bank in Frankfurt am Main entstand, diente die Notwendigkeit den Collateralisationsprozess zu optimieren, und daß im Gesamtportfolio enthaltene Risiko besser zu erfassen. Deshalb behandelt Kapitel 2 die Optimierung des Portfolios hinsichtlich Varianz und Kosten. Und Kapitel 3 wendet das Prinzip des VaR<sup>1</sup> auf Collateralised Trading an.

### 1.1 Was ist Collateralised Trading

Collaterale sind z.B. Wertpapiere, die dazu dienen, mögliche Ersatzkosten risikobehafteter, bilateraler Geschäfte (das sind OTC-Produkte<sup>2</sup>, wie Swaps oder OTC-Optionen) abzufangen. Somit ist Collateralised Trading der mit Sicherheiten unterlegte Handel von OTC-Produkten. Ein effizienter Collateralhandel wurde erforderlich wegen folgender Gründe:

- a) Dem Wunsch, auch mit Partnern die über schlechtes Rating<sup>3</sup> verfügen, zu handeln. Stellt ein schlecht gerateter Partner Collaterale (z.B. Bonds) erstklassigen Ratings, so ist zumindest deren Liquidation sichergestellt.
- b) Der Ausweitung des Geschäftes auf Osteuropa, Süd- und Zentralamerika.
- c) Höhere Anforderungen von Kunden und Geschäftspartnern an Effizienz und Qualität des Collateralhandels<sup>4</sup>, weil Größe und Komplexität der Portfolios immer mehr ansteigen.
- d) Da Swaps und andere unbesicherte, risikobehaftete Derivate sowie FX-Geschäfte gemäß KWG mit Eigenkapital zu unterlegen sind, kann Collateralisation Eigenkapital zur Ausweitung des Geschäfts freisetzen.
- e) Collaterale reduzieren einerseits Markt-, Liquiditäts- und Bonitätsrisiken, andererseits schaffen sie neue, institutionelle Risiken der Abhandlung, Berechnung, Visualisierung und rechtlichen Handhabung (Vertragsrisiken) der Collateralisation. Ein gewisser Teil der Risiken wird also nicht eliminiert sondern transformiert.
- f) Collateralisation erhöht, da mehr Partner am Handel teilnehmen können, die Marktliquidität des bilateralen Handels.

---

<sup>1</sup> Eine Definition findet sich in Kapitel 3 unter 3.1.1

<sup>2</sup> Siehe auch <Becker 1994>

<sup>3</sup> Ratingagenturen wie S&P und Moody's verteilen Ratingnoten von AAA bzw. Aaa (beste Bonität) bis C (niedrigste Bonität) an Institutionen, Banken und Industrieunternehmen. Siehe auch <Steiner 1996> S.162ff.

<sup>4</sup> Eine schnelle, reibungslose und kostengünstige Abwicklung, die unnötige Collateraltransfers vermeidet.

- g) Gestellte Collaterale reduzieren den Risikozuschlag bei der Marge, womit die Banken auf den zunehmenden Margendruck reagieren.

## 1.1.1 Die im Portfolio enthaltenen Bestandteile

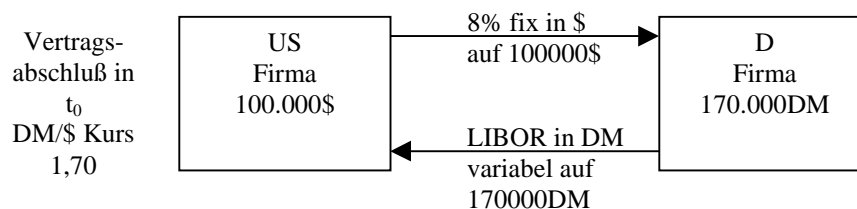
Alle OTC-Arten, für die wir ausreichend genaue Bewertungsformeln besitzen, sollen durch Collaterale abgesichert und in dieser Diplomarbeit behandelt werden. Folgende Liste gibt dafür einige Beispiele <sup>5</sup>:

- a) Interst Rate Swaps (Zinsswaps)
- b) Cross Currency Swaps (Währungsswaps)
- c) Swaptions (Option auf einen Swap)
- d) FX (Trading) (Devisenhandel)
- e) FX-Options (Devisenoptionen)
- f) Equity Options (Aktienoptionen)

Zur Veranschaulichung des Collateralised Trading werden mögliche Risiken obiger OTC-Prprodukte in Beispielen vorgestellt.

**b) Beispiel:** Swap zweier Zinsströme unterschiedlicher Währung:

Abb. 1.1.1.1 Cross Currency Swap



Beide Zahlungsströme wurden mit dem Present Value<sup>6</sup>-Konzept bewertet. Zuerst werden die zukünftigen LIBOR-Sätze durch die Forward Rates<sup>7</sup> geschätzt und dann der Present Value des variablen Zinsstromes berechnet. Danach wird der fixe Zinssatz im Zeitpunkt  $t_0$  so festgelegt, daß sich für beide Zahlungsströme derselbe Present Value ergibt<sup>8</sup>, bzw. ein  $PV(D,G)$ <sup>9</sup> und  $PV(US,G)$  von 0 für das Gesamtgeschäft, aus beiden Blickwinkeln. Angenommen die

<sup>5</sup> Unter den deutschen Stichwörtern findet sich eine Beschreibung in <Steiner 1996>.

<sup>6</sup> Vgl. <Steiner 1996> S. 136ff

<sup>7</sup> Vgl. <Steiner 1996> S. 150ff

<sup>8</sup> Siehe <Galitz> Kapitel. 9.10ff

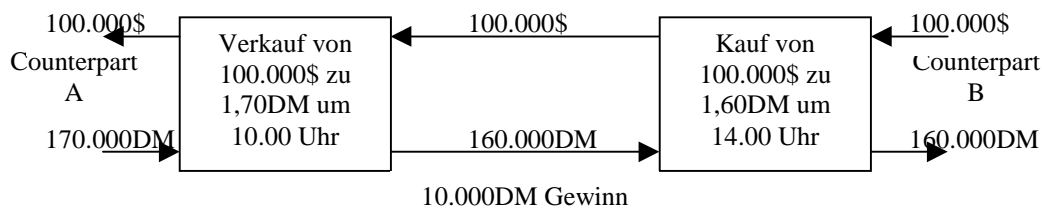
<sup>9</sup>  $PV(D,G)$ , Present Value des Gesamtgeschäftes aus Sicht des deutschen Unternehmens D.

Marktzinssätze fallen in  $t_1$  ( auch LIBOR geht runter, fix bleibt aber konstant) und der Wechselkurs des Dollars bleibt konstant. Dann ist  $PV(D,G) > 0^{10}$ . Dieser  $PV(D,G) > 0$  stellt für den deutschen Swappartner (D) ein aktuelles (ohne potentiell) **Marktexposure**<sup>11</sup> dar. Denn würde das amerikanische Unternehmen (US) ausfallen, müßte der fixe Zahlungsstrom zu den aktuellen, ungünstigeren Marktzinsen in  $t_1$  nachgebildet werden. Die Ersatzkosten dieser Nachbildung entsprechen genau  $PV(D,G)$  in  $t_1$ <sup>12</sup>. Deshalb muß der amerikanische Counterpart jetzt Collaterale stellen und zwar in Höhe von  $PV(D,G)$ , falls eine 100% Besicherung vereinbart wurde. Das US-Unternehmen sollte aus den vertraglich zulässigen Collateralen die für sich optimale Wahl (hinsichtlich Art und Menge) treffen. Diesen Aspekt behandelt Kapitel 2. Während der Transferdauer (bei Ausfall des Partners sprechen wir von Liquidationsdauer vorhandener Collaterale) kann aber  $PV(D,G)$  weiter ansteigen, so daß mehr Collaterale nötig gewesen wären. Dies ist das **potentielle Marktexposure**, welches wir in Kapitel 3 mit Hilfe eines VaR-Ansatzes untersuchen.

Bei diesem Beispiel ist zu beachten, daß der Swap für US einen **negativen Marktwert** besitzt. Anhand zweier weiterer Beispiele soll das Counterpartisiko für d) und e) veranschaulicht werden.

**d) Beispiel:** Intradaytrading (FX-Spot) mit einer Lieferzeit von 2 Tagen:

Abb. 1.1.1.2 FX-Spot



Fällt nun Counterpart B nach 14.00 Uhr, bei einem Kurs von 1,65 DM aus, müssen wir uns zu 165.000 DM mit 100.000 \$ eindecken, und verlieren bei diesem Close Out 5.000 DM. Für die Ersatzkosten gilt also:  $\text{Ersatzkosten} = 100.000 \cdot (1,65 - 1,60) = 5.000$ .

<sup>10</sup> Würde der \$-Kurs auch runter gehen,  $DM/\$ < 1,70$ , dann könnte  $PV(D,G) = 0$  oder sogar  $PV(D,G) < 0$  (abhängig davon, wie tief der Kurs tatsächlich sinkt), eintreten!

<sup>11</sup> Das Marktexposure wird bei Ausfall des Counterparts zu Ersatzkosten. Es entspricht genau dem positiven Marktwert des OTC-Produktes aus der Sicht des deutschen Unternehmens D.

<sup>12</sup> Dabei müssen wir das Rating aktueller und zukünftiger Partner vernachlässigen, sonst gleichen sich beide Beträge nur annähernd. Diese Bewertungsproblematik wird in Kapitel 3 diskutiert.

## e) Beispiel: Kauf einer FX Option

Abb. 1.1.1.3 FX Option



Fällt nun A im Zeitpunkt  $t_1 > t_0$  bei einem FX Callmarktpreis von 5 DM aus, entstehen uns Ersatzkosten in Höhe von 5 DM, d.h. die Ersatzkosten entsprechen der aktuellen Optionsprämie. Auch die Collaterale unterliegen einem potentiellen Marktwertänderungsrisiko und müssen deshalb folgende Anforderungen erfüllen:

- Liquidität, damit vorhandene Collaterale bei Ausfall des Counterparts (=Default) schnell liquidiert werden können.
- Leicht bepreisbar und Verfügbarkeit historischer Daten, damit die Risiko- und Ertragsmaße anwendbar sind.
- Möglichst sichere, nicht volatile Wertpapiere.
- Keine positive Korrelation zwischen Collateral und Bonität des Counterparts (z.B. eigene Aktien des Counterparts).
- Möglichst positive Korrelation zum Exposure.
- Gerated, weil die Kreditwürdigkeit des Emittenden den Wert des Collaterals bestimmt.

Solche, wie in obigen Beispielen veranschaulichte, Ersatzkosten, die durch Ausfall eines Partners entstehen, werden also durch gestellte Collaterale vermindert. Damit haben wir aber gleichzeitig neue Herausforderungen geschaffen.

- Theoretische Grundlagen, wie der Handel durchzuführen ist und wie man auf sich ändernde Marktwerte zu reagieren hat. Welche Stellgrößen zu definieren sind und absolute Grenzen, bei denen Handlungsbedarf besteht. Außerdem werden Bewertungsmodelle notwendig.
- Automatisierung des Handels durch „Collateral Management Systems“, die den effizienten Transfer, die Bewertung sowie die Verwaltung der Portfolien gewährleisten.
- Visualisierung der gewählten Risiko- und Ertragsmaße und Optimierung der Portfoliozusammensetzung.

---

Unter Berücksichtigung von a) wird hier Punkt c) bearbeitet. Auf Punkt a) muß eingegangen werden, damit die Ergebnisse in der Realität des Bankgeschäftes anwendbar werden. Ferner ist zu beachten, daß eine genaue Behandlung des Punktes a) von der betrachteten Bank abhängt.

## 1.1.2. Theoretische Grundlagen

Es gibt zwei Arten Collaterale zu stellen. Den **Pledge**, das ist die Verpfändung, dabei bleibt Collaterallieferant rechtlich Eigentümer der Collaterale. Und den **Title Transfer**, bei dem der Receiver auch Eigentümer der Collaterale wird.

Für uns ist nur wichtig, daß gelieferte Collaterale weiterverwendet werden dürfen. Dies ist beim Title Transfer immer erfüllt und beim Pledge vertragsabhängig.

Je weniger die vom Counterpart gestellten Collaterale die im Abschnitt 1.1.1 angeführten Anforderungen erfüllen, desto größere **Haircuts**<sup>13</sup> werden bei ihrer Bewertung angewendet. Die im OTC-Portfolio enthaltenen Geschäfte werden mit ihren Marktwerten, und im Gegensatz zu den Collateralen ohne einen **Korrekturfaktor**<sup>14</sup> für das potentielle Marktwertänderungsrisiko bewertet. Die potentiellen Marktwertänderungen schlagen sich bei der Limitbeantragung bzw. im maximal zulässigen Nettoexposure als **Add On** nieder. Dies hängt aber von der mit dem Counterpart vereinbarten Handelsart ab. Die drei möglichen Handelsarten (für jede Handelsart können wir als **Giver** oder **Receiver** auftreten) werden von den nachfolgenden Skizzen veranschaulicht. Alle Abbildungen zeigen Collateralwert und OTC-Marktwert aus unserer Sicht (siehe dazu 2.1.1).

### 1) Fully Collateralised Limit mit Initial Margin (=IM)

In diesem Beispiel müssen wir beim Geschäftsabschluß (Annahme: Marktwert=0) einen IM in Form von Collateralen stellen (=Giver). Die Differenz zwischen Exposure und Collateralwert (bzw. die Summe von negativem Marktwert und Collateralwert) darf nie unter diesen IM fallen, und bleibt unabhängig vom OTC-Marktwert konstant. Das positive Exposure des Counterparts entspricht betragsmäßig exakt dem, aus unserer Sicht negativen, Marktwert der OTC-Produkte. Bei dieser Handelsart muß nur einer der beiden Counterparts einen IM stellen. Wird unser OTC-Marktwert positiv, dann muß auch der Counterpart beginnen, Collaterale zu stellen.

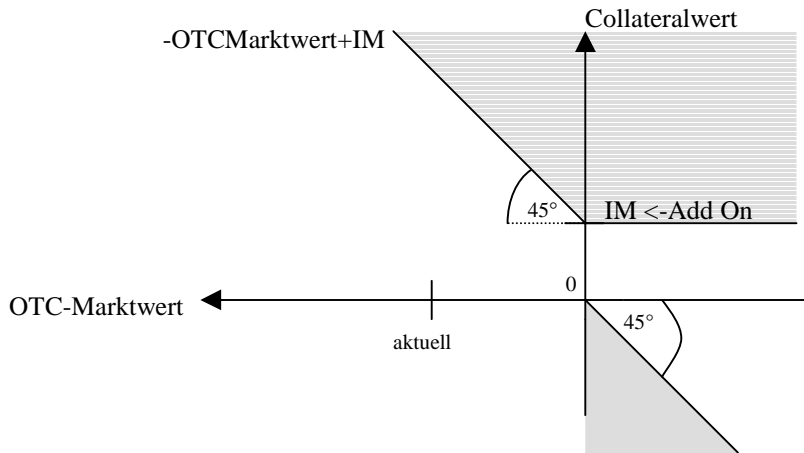
---

<sup>13</sup> Bei Haircuts handelt es sich um prozentuale Abschläge des Marktwertes, die dazu dienen einen möglichen Wertverlust vom Zeitpunkt des Default bis zum Liquidationszeitpunkt abzufangen. Außerdem sollen die Haircuts einen möglichen **Wertverfall der Collaterale**, vom Zeitpunkt der Anforderung bis zu ihrem Eintreffen (Transferdauer), abdecken. Als zusätzlicher Haircut kann die Bewertung der Collaterale zum Bid-Preis (Kaufpreis der Bank) angesehen werden. Stichwort Bid-Ask Spread.

<sup>14</sup> Falls wir uns beim Ausfall des Handelspartners, einem positivem Marktexposure (siehe Fußnote 11) gegenübersehen, dann dienen die Korrekturfaktoren dazu, einen möglichen Zuwachs des Marktexposures, vom Zeitpunkt des Ausfalls, bis zum Zeitpunkt der Liquidation der Collaterale, abzufangen. Auch hier sollen die Korrekturfaktoren (analog zu den Haircuts) zusätzlich einen möglichen **Zuwachs des Marktexposures der OTC-Produkte** während der Transferdauer der Collaterale abdecken.



Abb.1.1.2.1 Fully Collateralised Limit mit Initial Margin

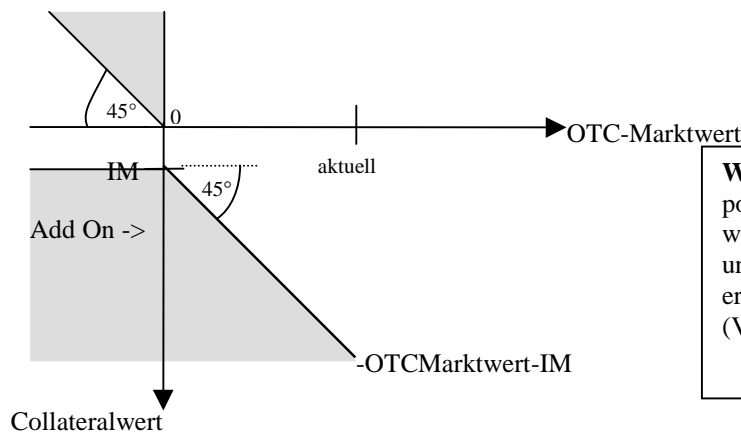


**Wir** sind der **Giver** mit negativem Gesamtmarktwert der OTC-Produkte nach Netting und positivem Wert der gestellten Collaterale.

## 2) Partially Collateralised Limit mit Initial Margin

Unser (in diesem Beispiel) positives Exposure entspricht dem Marktwert der OTC-Produkte. Hier muß der Counterpart uns den IM konstant stellen, aber auch wir könnten uns an seiner Stelle befinden.

Abb.1.1.2.2 Partially Collateralised Limit mit Initial Margin



**Wir** sind der **Receiver** mit positivem Gesamtmarktwert der OTC-Produkte und negativem Wert der erhaltenen Collaterale. (Vgl. Modell von 2.1.1)

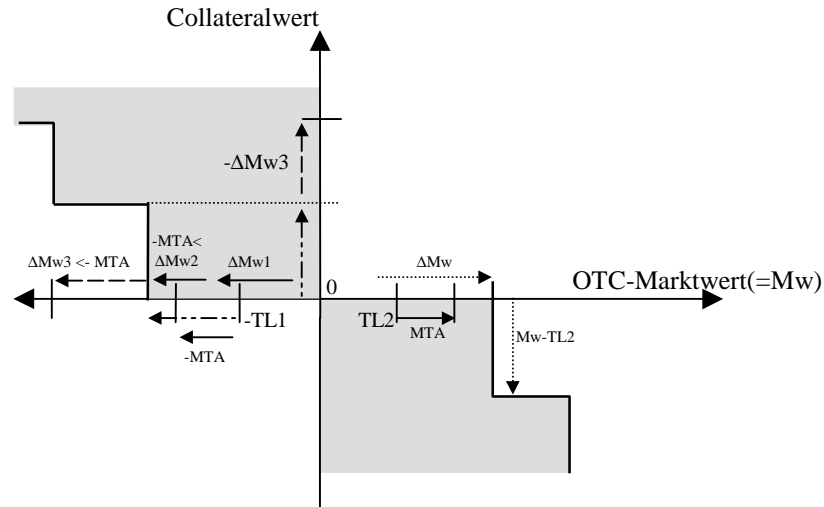
Im Fall 1) müssen wir Collaterale in der Form stellen, daß  $\text{Collateralwert} + \text{Min}(0, \text{OTC-Marktwert}) \geq \text{IM}$  gilt. Wobei IM in  $[0, \infty)$  liegt.

Im Fall 2) erhalten wir vom Counterpart Collaterale so, daß  $\text{Collateralwert} + \text{Max}(\text{OTC-Marktwert}, 0) \leq -\text{IM}$  gilt. Wobei hier der IM zwischen 0 und der aus den Add On's folgenden Obergrenze liegen kann. Im Unterschied zu Fall 1) muß hier keine Gleichheit herrschen.

## 3) Partially Collateralised Limit mit Threshold Level (=TL)

Folgende Abbildung zeigt den zu stellenden Collateralwert in Abhängigkeit unseres Marktwertes. Es wurde versucht vier unterschiedliche Szenarien ( $\Delta Mw$  bis  $\Delta Mw_3$ ) darzustellen.

Abb.1.1.2.3 Partially Collateralised Limit mit Threshold Level



Mit  $TL, MTA$  aus  $(\infty, 0)$  und  $MTA = \text{Minimum Transfer Amount}$ .

- 1) Der positive Marktwert  $Mw$  unserer OTC-Produkte ( $< TL_2$ ) erhöht sich um  $\Delta Mw$ . In diesem Fall muß aber nur die Differenz ( $Mw - TL_2$ ) in Form von Collateralen vom Counterpart gestellt werden.
- 2) Unser jetzt negativer Marktwert verringert sich weiter um  $\Delta Mw_1$  liegt aber unter der Schwelle ( $-TL_1 - MTA$ ) und deshalb müssen wir noch keine Sicherheiten stellen. Siehe Zeile 1 der nachfolgenden rekursiven Gesetzmäßigkeit.
- 3) Unser Marktwert verringert sich nochmals um  $\Delta Mw_2$  und liegt jetzt unter der kritischen Schwelle ( $-TL_1 - MTA$ ). In diesem Fall müssen wir den positiven Betrag des aktuellen Marktwertes abzüglich der Größe  $TL_1$  als Sicherheiten stellen (Zeile 2 der rekursiven Gesetzmäßigkeit). Obwohl diese einzelne Marktwertänderung betragsmäßig kleiner als  $-MTA$  war, da es auf die kumulierten Marktwertänderungen seit der letzten Collateralanpassung ankommt.

- 4) Die darauffolgende einmalige Marktwertänderung  $\Delta Mw_3$  unterschreitet  $-MTA$ , deshalb müssen wir sofort zusätzliche Sicherheiten in Höhe von  $|\Delta Mw_3|$  stellen.

Diese Handelsart liefert keine deterministische Collateralmindestmenge. Abhängig von den jeweiligen vorhergehenden, zufälligen Marktwertänderungen  $\Delta Mw$ , ändert sich die Grenzlinie der zulässigen Collateralwerte. Wir können keine infinitesimal kleinen Marktwertänderungen voraussetzen. Dafür sind die Zeiträume, welche zwischen zwei Marktwertmessungen liegen, verantwortlich. In der Zeichnung wurde  $TL_1=TL_2$  vorausgesetzt, das ist in der Realität aber nicht immer der Fall. Die Collateralgrenzlinie gehorcht (wenn wir stellen müssen; genauer für  $Mw \leq 0$ ) folgender, rekursiver Gesetzmäßigkeit:

$$\text{Coll.wert}_t = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls } Mw_t \in (-TL - MTA, 0] \\ |Mw_t + TL| & \text{falls } Mw_t \in (-\infty, -TL - MTA] \end{array} \right\} \wedge Mw_{t-1} \in (-TL - MTA, 0]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Coll.wert}_{t-1} & \text{falls } \Delta Mw \in (-MTA, MTA) \\ \text{Max}\{0, \text{Coll.wert}_{t-1} - \Delta Mw\} & \text{falls } |\Delta Mw| \geq MTA \end{array} \right\} \wedge Mw_{t-1} \in (-\infty, -TL - MTA]$$

$\Delta Mw := Mw_t - Mw_{t-1}$  sind die kumulierten Marktwertänderungen, seit der letzten Collateralanpassung in  $t-1$ .

## 1.1.2.4 Erläuterungen

Würden wir nur strenge Gleichheit statt obiger Ungleichungen zulassen, dann ist dies zwar für die Kostenminimierung ausreichend, läßt aber den Varianzaspekt unbeachtet. Denn um eine minimale Varianz zu erlangen, kann es vorteilhaft sein, ein geringeres Nettoexposure des Counterparts anzustreben (maW, mehr Collaterale als notwendig zu stellen). Folgerichtig kann es dann auch vorkommen, daß uns ein Counterpart etwas weniger zurückschicken muß, als wir fordern dürften. Dies gilt auch für den Counterpart, er darf uns mehr stellen und wir können etwas weniger zurückschicken. Dies sollen die schattierten Flächen veranschaulichen. Bei der späteren Optimierung der Collateralzusammensetzung kann es vorkommen, daß unser Algorithmus mehr Collaterale zurückhalten oder schicken will, als der Counterpart bzw. wir selbst akzeptieren. Deshalb werden Restriktionen benötigt, die diesen Spielraum geeignet einschränken. Solche Restriktionen finden sich unter 2.2.2.3 4a) und 4b) sowie im Abschnitt 2.2.1.3. unter Punkt 4).

Das **Nettoexposure** errechnet sich aus der Summe der „Marktwerte“<sup>15</sup> aller OTC-Produkte und Collaterale. Wie wir bereits wissen, können OTC-Produkte auch negative Werte annehmen (siehe Swapbeispiel unter 1.1.1). Das Nettoexposure darf eine vorher festgelegte vertragliche Obergrenze nicht überschreiten. Wenn mehrere Counterparts in einem Portfolio zusammengefaßt werden, gibt es für jeden Counterpart  $k$  ein maximal zulässiges Nettoexposure  $d_k$ . Dieses Nettoexposure entsteht durch die Summe der OTC-Produkte und Collaterale, die sich auf Counterpart  $k$  beziehen. D.h. ein Crossnetting mit Collateralen anderer Counterparts ist nicht möglich.

Im realen Handel kann es vorkommen, daß zwei Counterparts aufgrund unterschiedlicher Bewertungsmethoden (z.B. unterschiedliche Schätzungen eines variablen Zinsstromes) verschiedene Marktwerte errechnen. Die Behandlung dieses Unterschiedsbetrages (Dispute Amount) ist vertraglich geregelt, so daß wir von der Annahme gleicher Bewertungsergebnisse ausgehen können.

Unser späteres Optimierungsmodell wird nicht alle Handelsarten automatisch abdecken (vgl. 2.2.4.1 Modellannahmen). Das Modell behandelt alle vorgestellten Handelsarten mit stetiger Grenzlinie im Nullpunkt richtig (IM=0). Z.B. Handelsart 3) und Handelsart 2) mit einem Initial Margin von 0.

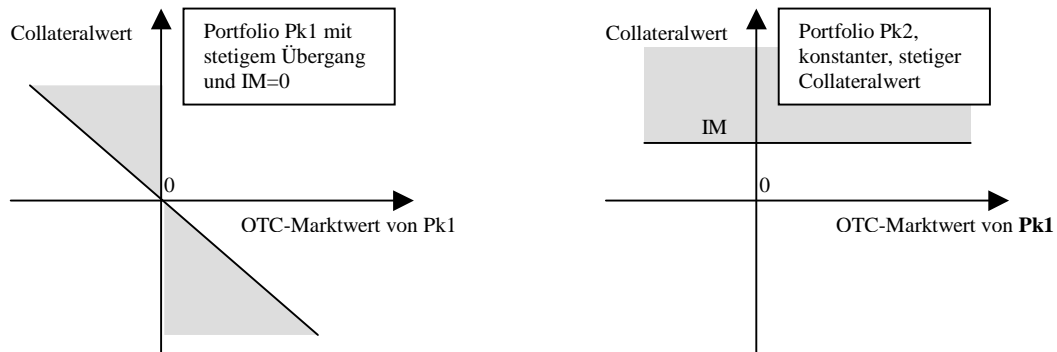
---

<sup>15</sup> „Marktwerte“ sind die realen Marktwerte modifiziert durch Haircuts, die OTC-Marktwerte werden nicht modifiziert.

Um unstetige Fälle (Initial Margin  $> 0$ ) damit zu modellieren, müßte man (z.B. Fall 1) die konstant beim Counterpart verbleibenden Collaterale als zusätzliches, konstant zu haltendes Portfolio auffassen, in dem alle OTC-Produkte einen Marktwert von 0 haben.

D.h. ein Portfolio  $P_k$  für Counterpart  $k$  mit  $IM > 0$  (wie in Abb. 1.1.2.1) muß durch zwei Portfolien  $P_{k1}$  und  $P_{k2}$  ersetzt werden.

Abb.1.1.2.5 Portfoliozerlegung



Eine andere Möglichkeit ist, daß Portfolio  $P_{k2}$  nicht zu berücksichtigen, d.h. den  $IM > 0$  zu vernachlässigen.