2. Kosten- und Varianzminimierung

Wir behandeln einen kombinierten Vorschlag, wie Transferkosten/-risiko und Beschaffungskosten minimiert werden können. Banken beabsichtigen nicht nur für Eigengeschäfte die Collateralzusammensetzung zu optimieren, sondern dies auch als Serviceleistung für Kunden anzubieten.

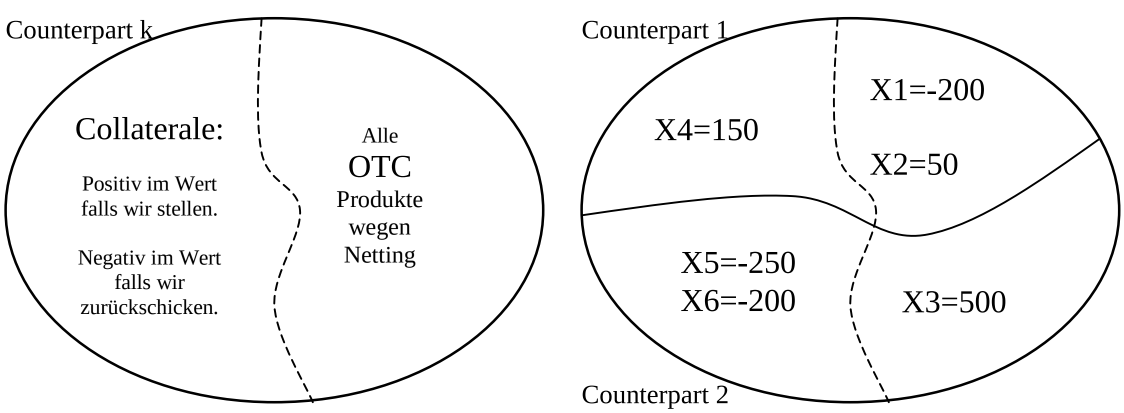
2.1. Modellarten

Folgende Kapitel stellen zwei, für die Optimierung, denkbare Modellarten vor. Beide Modelle fassen Collaterale und OTC-Produkte zu einem Gesamtportfolio zusammen, um alle Diversifikationseffekte (Korrelationen) zu berücksichtigen.

2.1.1 Verwendetes Portfoliomodell

Wenn wir Collaterale stellen müssen, dann haben die OTC-Produkte für uns einen negativen Gesamtwert, bzw einen, unter der zulässigen Untergrenze liegenden Wert (vgl. 1.1.2). Diesen erhöhen wir durch das Stellen von Collateralen, die für uns einen positiven Wert haben (Counterpart 1). Aus der Sicht des Counterparts wird sein positives Marktexposure zum Nettoexposure verringert. Umgekehrt, falls die OTC-Produkte für uns einen positiven Gesamtwert aufweisen (genauer, der Counterpart Collaterale stellen muß), reduziert der von uns aus gesehen negative Wert, der vom Counterpart gestellten Collaterale, unser positives Marktexposure (=Marktwert) zum Nettoexposure.

Abb. 2.1.1.1 Portfoliomodell



Die Minimierung der Varianz führt dazu, daß involatile Collaterale mit, wenn möglich, negativer Korrelation zu OTC-Produkten verstärkt Verwendung finden (siehe auch 1.1.1). Mathematisch wird $E[(X-\mu)^2]$, daß erwartete Abweichungsquadrat minimiert.

Es soll betont werden, daß in diesem Modell, die Marktwerte der OTC-Produkte um einen Faktor, der das potentielle Marktwertänderungsrisiko quantifiziert, erweitert werden. Dies ist unproblematisch, denn falls doch die realen Marktwerte verwendet werden sollen, setzt man die OTC-Faktoren (dies gilt auch für die Haircutfaktoren) gleich 1.

Im weiteren werden diese modifizierten Marktwerte als **„Marktwerte“** bezeichnet, im Unterschied zu realen Marktwerten. Demnach ist der Betrag vom „Marktwert“ eines Collaterals höchstens so groß wie sein realer Marktwert, und analog ist das, für die OTC-Produkte angesetzte Marktexposure mindestens so groß, wie der Betrag des wirklichen Marktwertes.

Bei der Aufstellung des Optimierungsproblems betrachten wir zwei Arten von Teilportfolien.

1) Portfolien von Counterparts, denen wir Collaterale stellen müssen.
2) Portfolien von Counterparts, von denen wir Collaterale erhalten.

Mit diesen beiden Portfolien versuchen wir folgende Ziele zu erreichen:

Wir streben minimale Varianz und Kosten bei den zu stellenden und zurückzuschickenden Collateralen an.

Von Counterparts gestellte Collaterale sparen Beschaffungskosten ein[1], weil wir selbst Sicherheiten stellen müssen und die erhaltenen Collaterale weiterverwenden dürfen oder sie anderweitig gewinnbringend verwenden. Collaterale, die wir zurückschicken müssen, verursachen Beschaffungskosten[2], da wir sie nicht mehr zum Stellen verwenden können oder, wenn wir sie schon verwendet haben, extra beschaffen müssen.

Transaktionskosten sind nicht in den Beschaffungskosten enthalten, denn sie werden pauschal mit der Varianz minimiert.

[1] Dies geschieht durch einen positiven Kostenfaktor c multipliziert mit der negativen Marktwertänderung der Collaterale (weil der Counterpart weitere Sicherheiten stellt), was einen negativen Wert liefert, der bei einer Aufsummierung der Kostenbeträge den Gesamtkostenbetrag verringert.

[2] Der positive Kostenfaktor multiplizert mit der positven Marktwertänderung unserer Collaterale (weil wir weitere Sicherheiten stellen), erhöht den Gesamtkostenbetrag.

2.1.2 Markowitz Modell

Hier soll kurz erläutert werden, warum sich das Markowitzmodell[3] der klassischen Portfoliotheorie nicht zur Modellierung des Gesamtportfolios eignet. Diese Darstellung beschränkt sich auf den Fall, daß wir Collaterale stellen müssen.

Dementsprechend gelten die Daten des Counterpart 1 von Abb. 2.1.1.1 und damit liefert das Markowitzmodell:

$\Sigma X_i=0$ keine relativen Gewichte bildbar. Allgemein: $x_i=X_i/\Sigma X_i$ $\Sigma x_i=1$ wenn $\Sigma X_i \neq 0$.

1) Da theoretisch der Fall $\Sigma X_i = 0$ eintreten kann, was eine Division durch Null ergibt, ist das Markowitzmodell nicht elegant. Auch wenn dieser Fall in der Praxis nicht exakt eintritt.
2) Markowitz geht von einem festen Vermögen V aus, das in Wertpapiere investiert werden soll. Beim etablieren eines Portfolios ist also $\Sigma X_i = V$ ex ante bekannt. Damit werden die relativen Gewichte x_i berechenbar. Im Gegensatz dazu geben wir uns, wegen dem Varianzaspekt, nur eine Obergrenze[4] für das Nettoexposure ΣX_i des Counterparts, beim Collateralised Trading, vor. Der wirkliche Wert des Nettoexposures ist ex ante unbekannt und hängt von der optimalen Zusammensetzung des Portfolios ab. Würde das maximal zulässige Nettoexposure verwendet werden, dann nützt dies[5] zwar für die Kostenminimierung, läßt aber den Varianzaspekt unberücksichtigt. Denn, um eine minimale Varianz des Nettoexposures zu erlangen, kann es durchaus nötig sein ein geringeres (als das maximale) Nettoexposure anzustreben.
3) Diese Überlegungen gelten auch für das Umschichten eines bestehenden Portfolios. Das optimale Nettoexposure müßte im voraus bekannt sein oder es wäre die Voraussetzung nötig, das Nettoexposure durch die Umschichtung nicht zu verändern. Dies ist aber eine zusätzliche Restriktion, die den Optimierungsspielraum stark einschränkt.

[3] Vgl. <Steiner 1996> S. 6ff

[4] Aus unserer Sicht die Untergrenze, ab der wir den -möglicherweise negativen- Marktwert unserer OTC-Produkte besichern müssen.

[5] Vgl. Abschnitt 1.1.2.4.

2.2 Minimierung im verwendeten Modell

Minimierung der gesamten Varianz, und nicht nur des Korrelationsteils, trägt dem Gedanken Rechnung, nur möglichst involatile Collaterale zu nutzen. Denn ein günstig korreliertes Collateral könnte gleichzeitig eine sehr hohe Einzelvarianz mit sich bringen. Im Idealfall bleibt das Nettoexposure konstant und daraus folgt, Varianz gleich Null. Ist umgekehrt die Varianz gleich Null dann bleibt das Nettoexposure konstant. Die minimale Varianz verringert die Transaktionskosten der Collateraltransfers und das Transferrisiko. Dabei dürfen aber die Beschaffungskosten der Collaterale nicht zu groß werden.

Im folgenden Kapitel 2.2.1. soll ein neues Portfolio etabliert werden. Die für eine optimale Zusammenstellung nötigen Daten der Restriktionen könnten durch Aufstellen eines “a priori”-Portfolios geschätzt werden.

Kapitel 2.2.2 zeigt die Optimierung eines bereits bestehenden Portfolios (wegen Umschichtung oder Minimierung der Varianz). Wie oben schon erwähnt, kommt es darauf an, die Kosten der nötigen Umschichtung möglichst gering zu halten und gleichzeitig die Varianz zu minimieren. Wir werden feststellen, daß dies mathematisch eine Verallgemeinerung von Kapitel 2.2.1 ist.

2.2.1 Optimale Neuerstellung eines Portfolios

Beide Zielgrößen werden additiv zusammengefügt und linear gewichtet, damit die Präferenzen der Entscheidungsträger für geringe Varianz oder geringe Anschaffungskosten berücksichtigt werden können. Abhängig davon, welche der beiden Größen die Optimalitätsentscheidung dominieren soll, werden Varianz- und Kostenfunktion unterschiedlich gewichtet.

Für eine sinnvoll gewichtete, additiv zusammengesetzte Zielfunktion müssen die Größenverhältnisse der Wertebereiche beteiligter Zielfunktionen berücksichtigt werden.

Da in unserem Modell die Varianz betragsmäßig die Kosten eindeutig dominiert, betrachten wir folgende Zielfunktion:

2.2.1.1 Definition (Zielfunktion)

Es sei XS ein zulässiger Startpunkt von dem aus optimiert wird. $V(X):=X^T*\Sigma_{ij}*X$ und $c(X) := c^T*X$ die Varianz bzw. die Kosten in Abhängigkeit des Marktwertvektors X. Ferner definieren wir $V_{rel}(X) := \frac{V(X)}{V(XS)}*100$ und $c_{rel}(X) := \frac{c(X)}{|c(XS)|}*100$. Damit betrachten wir die zu minimierende Zielfunktion:

$$M(X) := a*V_{rel}(X) + b*c_{rel}(X) =: M_1(X) + M_2(X)$$

Für a und b gilt dabei: $a,b \geq 0$ sowie $a+b=1$. Außerdem müssen wir V(XS) und c(XS) als von 0 verschieden voraussetzen. Zusätzlich seien die Matrix Σ^{rel} und der Vektor c_{rel} definiert durch folgende Beziehung: $\Sigma_{ij}^{rel} := \frac{100*\Sigma_{ij}}{XS^T\Sigma_{ij}XS}$ sowie $c_{rel} := \frac{100*c}{|c^T XS|}$. Und die Zielfunktion wird zu:

$$M(X) = a*X^T\Sigma_{ij}^{rel}X + b*c_{rel}^T X$$

2.2.1.2 Folgerung

a) $M_1(XS) = 100*a$, $M_2(XS) = 100*b$ $M_1(XS)+M_2(XS) = 100$
b) Nach der Minimierung gilt, daß der minimierte Funktionswert, $M(X_{min})$, im Intervall [0, 100] liegt, falls $c(X)\geq 0$ gilt, für alle zulässigen X. Die Collateraltransfers erbringen demnach keinen Gewinn.
c) Es werden relative (prozentuale) Änderungen von Varianz und Kosten betrachtet, was die betragsmäßige Dominanz der Varianz eliminiert.
d) Die prozentualen Veränderungen beziehen sich auf die unterschiedlichen Werte V(XS) und c(XS). Für eine ökonomische Interpretation müssen sie daher getrennt betrachtet und nicht additiv zusammengefaßt werden.
e) Falls wir mehr Sicherheiten erhalten als stellen, ist c(XS) negativ. Damit wir bezüglich der Kosten auch wirklich möglichst wenig Collaterale schicken wollen, muß im Nenner der Teilfunktion M_2 der Betrag von c(XS) stehen. Wird das Modell so eingesetzt, daß stets für alle zulässigen X $c(X)>0$ gilt, kann der Betrag entfallen. Dies ist der Fall, wenn wir nur Portfolien betrachten, in denen wir stellen oder zurückschicken.

Betrachtet man in der Zielfunktion ausschließlich die Varianz, dann kann auch mit M(X)=V(X) dem absoluten Varianzbetrag gearbeitet werden. Eine geringe Varianz zahlt sich während der Laufzeit aus und verursacht im Umschichtungszeitpunkt Kosten, wohingegen der lineare Kostenteil der Zielfunktion hauptsächlich im Umschichtungszeitpunkt relevant ist.

Gilt a+b=1 und a,b≥0, dann variiert die gewonnene Zielfunktion M(x) zwischen der Varianz $V_{rel}(x)$ und der Kostenfunktion $c_{rel}(x)$, abhängig davon wie a und b gewählt werden.

Das folgende Optimierungsproblem gestaltet sich bewußt allgemein, und der Anwender kann es seinen individuellen Präferenzen anpassen. Setzt man z.B. a und b ungleich Null, dann können die Restriktionen für Kosten und Varianz weggelassen werden. Ist a=0 und b>0, wird die Varianzrestriktion sinnvoll.

2.2.1.3. Optimierungsproblem

$$\underset{X}{\mathrm{Min}}\left(a * V_{rel}(X) + b * c_{rel}(X)\right)$$

mit[6]

$$X^T = (X^T_{OTC}, X^T_{CL}) = \left(X^T_{OTC1} \ldots X^T_{OTCm}, X^T_{CL1} \ldots X^T_{CLm}\right) \text{wobei } X^T_{OTCk} = \left(X^T_{OTCk(-)}, X^T_{OTCk(+)}\right)^{7} \text{und}$$

$$X_{CLk} = (X_{CLk1}, \ldots, X_{CLkq}),\ X_{OTCk} = (X_{OTCk1}, \ldots, X_{OTCkp}) \quad \forall k \in \{1, \ldots, m\}$$

unter den Nebenbedingungen:

1) $X_{OTC} = h$ konstant vorgegeben

2) $X_i = \begin{cases} \geq 0 & \text{falls wir stellen müssen} \\ z_i \leq 0 & \text{falls der Counterpart stellt} \end{cases} \quad i \in \{1, \ldots, q\} \forall k$

3) $\underset{i \in CL}{} c_i * X_i \leq C$

4) $\underset{i \in (OTC_k, CL_k)}{} X_i \begin{cases} \in [d_k, d_k + const_k] & \text{falls k Receiver ist} \\ \in [d_k - const_k, d_k] & \text{falls k Giver ist} \end{cases} \quad k \in \{1, \ldots, m\},\ const_k \geq 0$

5) $\underset{i \in \{CL(1s), \ldots, CL(ms)\}}{} X_i \leq g_s \quad s \in \{1, \ldots, q\}$

6) $X^T \Sigma_{ij} X \leq V_{max}$

Dabei gilt:

a) CL und OTC sind die Indexvektoren der Collaterale und OTC-Produkte

b) CL_k und OTC_k sind obige Indexvektoren, *eingeschränkt auf Counterpart k.*

c) CL(ks) aus {1,...,m(p+q)} ist der Index von Collateraltyp s für Counterpart k. MaW., $CL(ks) \in CL_k$.

d) X_{OTC} ist Teilvektor von X und besteht aus den „Marktwerten“ X_i der OTC-Produkte. Außerdem enthält X_{OTC} *alle* zulässigen OTC-Produkte für jeden Counterpart k, d.h. X_i=0 ist möglich. Das X_{OTC} fest vorgegeben ist gilt, weil wir eine gegebene Menge von OTC-Produkten besichern.

e) X_{OTCk} ist Teilvektor von X_{OTC} und enthält die „Marktwerte“ der Produkte eingeschränkt auf Counterpart k. Dabei zerfällt X_{OTCk} in seine negativen und positiven Bestandteile, $X_{OTCk(-)}$ und $X_{OTCk(+)}$.

[6] Die Vektoren X_{OTC} und X_{CL} werden noch in die m Counterparts und nach ihrer Art unterteilt. Ein Produkt kommt also m mal (mit verschiedenen Gesamtmarktwerten) vor.

[7] Diese Notation soll veranschaulichen, daß X_{OTC} sowohl negative als auch positive Komponenten enthält, um wirklich $X_{OTC}=(X_{OTC(-)}, X_{OTC(+)})$ zu erhalten, müßte eine entsprechende Umordnung vorgenommen werden.

f) X_{CLk} enthält für jeden Counterpart k alle zulässigen Collateraltypen, auch hier kann also X_i=0 gelten. Abhängig davon, ob wir Collaterale stellen oder erhalten gilt $X_{CLk} \geq 0$ oder $X_{CLk} \leq 0$.

g) m ist die Anzahl aller Counterparts. Genauer ist m die Anzahl aller Einzelportfolioen, da wir in Abschnitt 1.1.2 festgestellt haben, daß es Handelsarten gibt, welche die Aufteilung eines Counterpartportfolios P_k in Portfolien P_{k1} und P_{k2} notwendig machen. Wir tun so, als ob ein aufgeteiltes Portfolio zwei verschiedene Counterparts hätte.

h) g_s = maximal beschaffbarer Gesamtbetrag des Collaterals s. Ohne diese Restriktion könnte es sein, daß wir nach der Optimierung feststellen, die erforderliche Collateralmenge von vom Typ s nicht beschaffen zu können. Die negativen Werte der von Counterparts gestellten Collaterale entlasten diese Obergrenze, da wir diese Collaterale nicht beschaffen müssen.

i) $d_k = \begin{cases} -\text{zulässiges Nettoexposure von k} & \text{falls Counterpart k Receiver ist} \\ \text{unser zulässiges Nettoexposure} & \text{falls Counterpart k Giver ist} \end{cases}$

Die d_k folgen aus den in Abschnitt 1.1.2 betrachteten Handelsarten.

Diese Restriktion ist für uns wichtig, damit das Nettoexposure des Counterparts nicht zu groß wird. *Andererseits würde sie die Unzulässigkeit des Optimierungsproblems verursachen, falls der Counterpart zu wenig Collaterale* **z** *schickt und unser Nettoexposure dadurch zu groß werden würde.*

Dieser Kontrollmechanismus ist aber nur dann sinnvoll, wenn wir **z** vor der Optimierung kennen. Falls wir z nicht kennen, müssen wir vom „worst case“ (keine Collaterale zu bekommen) ausgehen, d.h. z = 0 annehmen. Das könnte aber bei variierendem OTC-Marktwert Unzulässigkeit verursachen, obwohl Counterpart k ausreichend viele Collaterale stellt. Portfolien, bei denen Counterpart k Giver ist, und wir nicht wissen, was wir bekommen werden, müssen deshalb bei der Optimierung vernachlässigt werden.

$d_k \pm const_k$ berücksichtigt den, in 1.1.2.4 besprochenen, Aspekt des eingeschränkten Spielraums beim Stellen von Collateralen.

j) Das Gesamtportfolio besteht aus vielen Segmenten, ein Segment i aus {1,...,m} stellt die mit Counterpart i gehandelten OTC-Produkte und deren Collaterale dar. Collaterale und OTC-Produkte dürfen nur innerhalb dieses Segments zum Nettoexposure verrechnet werden. Ein „Crossnetting" ist nicht möglich. Mathematisch kann man diese Segmente als Äquivalenzklassen betrachten. Darum muß die Restriktion $X_1+...+X_n \leq \Sigma^m d_k$ auch durch m Restriktionen (für jeden Counterpart eine) ersetzt werden und deshalb ist sie auch redundant.[8]

k) C = maximal zulässige Gesamtkosten ≥ 0 und für c gilt:

$$c_i = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{falls} \quad i \in OTC \\ \dfrac{-\,\text{Anschaffungskosten pro Collateraltyp i}}{\text{"Marktwert" pro Collateral i}} & \text{falls} \quad i \in CL \end{array} \right\} \geq 0$$

Der „Marktwert" eines Collaterals ist <u>hier</u> der reale, positive Marktwert des Collaterals multipliziert mit einem positiven Haircutfaktor (≤ 1). Die Anschaffungskosten entstehen durch die Beschaffungskosten (Refinanzierungskosten) der für Collaterale gelieferten Barmittel, vermindert um die Repo Rate, welche uns der Collaterallieferant zu zahlen hat. Da die Collaterale über „Reverse Repo's"[9] beschafft werden, gilt:

c_i = durchschnittl. Refinanzierungssatz von i (in t_0) – durchschnittl. Repo Rate von i (in t_0)

l) Vektor h enthält die aktuellen „Marktwerte" der OTC-Produkte.

m) Da für jedes i X_i eine rationale Zahl ist, setzt unser Portfoliomodell (wie oben schon erwähnt) beliebig teilbare Finanzinstrumente voraus. Bei der Menge der gestellten Collaterale ist es jedoch unerheblich ob wir *entweder* 5000,7 Bundesanleihen zum Kurswert von 500.070 DM und 5000,3 Treasury Bonds zu 500030 DM *oder* 5001 Bundesanleihen zu 500.100 DM und 5000 Treasury Bonds zu 500.000 DM transferieren.

n) V_{max} ist die Varianzobergrenze

o) (1,...,p) und (1...q) sind die Indexvektoren der OTC- bzw. Collateraltypen. Es gilt, p:= $\#OTC_1 = \#OTC_2 = ... = \#OTC_m$, q:= $\#CL_1 = \#CL_2 = ... = \#CL_m$.

[8] Man beachte, daß die Regel, kein Cross Netting durchzuführen, die Anzahl der Restriktionen auf fast das m-fache erhöht.

[9] Dabei handelt es sich um Wertpapierpensionsgeschäfte, in diesem Fall geben wir einen "Kredit" und erhalten dafür Wertpapiere, die wir als Collaterale verwenden können. Siehe auch <Becker 1994> und **Anhang 5.2.3**.

Die Struktur der Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_{ij} wird gesondert gezeigt.

Wichtig ist, daß die Kurswerte der OTC-Produkte bereits in monetärer Form vorliegen. Den entsprechenden Wert in der Base Currency erhalten wir mit Hilfe der Wechselkurse w. Die Kurswerte Kw% der Collaterale hingegen liegen in Prozent des Nominalwertes Nom vor. D.h. man kann den Kurs der Collaterale in der Base Currency durch Nom*(Kw%/100)*w berechnen. Um die gegebenen Zeitreihen geeignet zu modifizieren, setzen wir für Nom konstante Nominalwerte (konkret Nom=1000) ein.

Es sei $X_i^{1\,real}$=Nom*(Kw%/100)*w der entsprechende, noch nicht durch Haircut- oder Korrekturfaktoren modifzierte Marktwert des Collaterals i aus unserer Sicht (vgl. das Marktwertmodell von 2.1.1). Dieser Marktwert bezieht sich auf den eingesetzten Nominalwert[10]. Ferner sei σ_i^2 dessen Varianz und σ_{ij} die Kovarianz zwischen zwei Marktwerten $X_i^{1\,real}$ und $X_j^{1\,real}$.

Wir definieren den Faktor λ_i als Haircut oder OTC-Faktor (abhängig davon, ob i ein Collateral oder OTC-Produkt ist). Damit sind die Varianz und die Kovarianz der X_i^1 gleich $\lambda_i^2\sigma_i^2$ und $\lambda_i\lambda_j * \sigma_{ij}$.

Für die Matrix $\Sigma_{ij} \in IR^{nxn}$ (mit n=m(p+q)) gilt damit (bzgl. der X_i):

2.2.1.4

$$
{}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2\sigma_1^2 * \dfrac{1}{{X_1^1}^2} & & \lambda_i\lambda_j\sigma_{ij} * \dfrac{1}{X_i^1 X_j^1} \\ & \ddots & \\ \lambda_i\lambda_j\sigma_{ij} * \dfrac{1}{X_i^1 X_j^1} & & \lambda_n^2\sigma_n^2 * \dfrac{1}{{X_n^1}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{OTC1,OTC1} & \cdots & \Sigma_{OTC1,CLm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{CLm,OTC1} & \cdots & \Sigma_{CLm,CLm} \end{pmatrix}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad {}_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{X_1^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{\lambda_n}{X_n^1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{ij} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{X_1^1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{\lambda_n}{X_n^1} \end{pmatrix}
$$

[10] Der Nominalwert einer Mindeststückelung ist bondabhängig und beträgt z.B. bei Bundesanleihen 1000 DM.

Wie man sieht, muß die Matrix mit aktuellen “Marktwerten”, OTC-Faktoren und Haircuts an das Portfoliomodell angepaßt werden. Die aktuellen “Marktwerte” werden immer benötigt. Denn würden wir als zu optimierende Variable die <u>Anzahl</u> der Finanzinstrumente und nicht <u>deren “Gesamtmarktwert”</u> betrachten, dann bräuchten wir die “Marktwerte” zwar nicht zum Anpassen der Matrix, dafür aber in den Restriktionen.

Die Matrix Σ_{ij} läßt sich noch vereinfachen, weil $X_i^1 = \lambda_i X_i^{1\ real}\ \forall i$ gilt.

2.2.1.5

$$ {}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{X_1^{1\,real}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{X_n^{1\,real}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{ij} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{X_1^{1\,real}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{X_n^{1\,real}} \end{pmatrix} $$

Bei einer späteren Multiplikation $X^T * \Sigma_{ij} * X$ ergibt $\frac{X_i^{real}}{X_i^{1\,real}}$ die Anzahl der Collaterale bzgl. des eingesetzten Nominalwertes. Auch die Varianzen und Kovarianzen wurden bzgl. dieses Nominalwertes berechnet.

Aber nur wenn die historischen Kurswerte der OTC-Produkte vorliegen, ist eine historische Schätzung der Varianz-Kovarianz-Matrix möglich.

Sind für die OTC-Produkte keine historischen Werte vorhanden (möglich, weil die OTC-Produkte oft erst bei Neuerstellung des Portfolios ins Leben gerufen werden), dann kann die historische Varianz-Kovarianz-Matrix nicht berechnet werden.

Einziger Ausweg, falls unbedingt Kovarianzen geschätzt werden sollen, ist, sich die Frage zu stellen, wie hätte sich das OTC-Produkt in der Vergangenheit verhalten, wenn es schon existiert hätte. Die Idee ist, eine Simulation über Bewertungsformeln (dafür sind historische Zeitreihen der Stellparameter der Bewertungsformeln nötig) durchzuführen. Ein Beispiel dafür liefert die Simulation der Stellparameter des Portfolios von Abschnitt 3.5.2.5. Dort werden simulierte Zeitreihen für zwei Finanzinstrumente ermittelt, woraus sich Korrelationen berechnen lassen.

Hier wird deutlich, die Portfoliooptimierung profitiert durchaus von einem “Abfallprodukt” der Simulation, die von uns zur Berechnung des VaR benutzt wird.

2.2.2 Optimale Portfolioumschichtung

Für die Umschichtung des Portfolios definieren wir zusätzlich:

- **P(1):=X(1)** ist das bisherige Portfolio P, definiert durch den Marktwertvektor X der Finanzinstrumente.
- Für einen beliebig festen Zeitpunkt t sei die Portfolioänderung **ΔP:=**P(2)-P(1) =X(2)-X(1)**=:ΔX**=$(\Delta X_1,...,\Delta X_n)$.

Wobei P(1) das alte, und P(2) das umgeschichtete Portfolio repräsentiert.

Wir gehen von der Annahme aus, daß Collaterale die durch die Umschichtung wieder verfügbar sind[11], an anderer Stelle verwendet werden. D.h. sie sparen Kosten ein, die im Zeitpunkt der Umschichtung genau den Kostenfaktoren c_i entsprechen. Für unser Optimierungsproblem bedeutet dies, daß sie um den Betrag $\Delta X_i * c_i > 0$ die Umschichtungskosten verringern. Diese Annahme erleichtert den Optimierungsansatz enorm, da wir uns nicht um die Vorzeichen der ΔX_i kümmern müssen.

Wir haben den Indexvektor CL bereits in die m Counterparts aufgeteilt. Bei einer Umschichtung treten jetzt (für einen beliebig festen Counterpart k) zwei mögliche Fälle ein:

1) Counterpart k fordert weitere Collaterale oder wir schicken Collaterale zurück. In diesem Fall gilt immer: $\Delta X_{CLk} \geq 0$ bzw. $X(2)_{CLk} \geq X(1)_{CLk}$ mit k=1...m.
2) Counterpart k schickt Collaterale zurück oder stellt weitere Collaterale. Dann ist $\Delta X_{CLk}=z_k \leq 0$ bzw. $X(2)_{CLk}=z_k+X(1)_{CLk}$ fest vorgegeben. z_k ist der Vektor der von Counterpart k im Umschichtungszeitpunkt zurückgelieferten Collaterale. Wobei $z_{k,j}=0$ bedeutet, daß Counterpart k Collateral j nicht zurückgeschickt oder gestellt hat.

Wegen obiger Fallunterscheidung führen wir zusätzlich die Indexmenge **{CollIn}** ein, die alle Counterparts k enthält, welche Collaterale zurückschicken oder zusätzlich stellen *und von denen* z_k *bekannt ist*. Und die Indexmenge **{CollOut},** die alle Counterparts k enthält, die von uns Collaterale erhalten. Beide Indexmengen unterscheiden sich von der jeweiligen Gruppe der Giver oder Receiver (vgl. 1.1.2). Nur im Fall der Portfolioersterstellung, bei der ein Zurückschicken nicht auftritt, gilt Äquivalenz (vgl. 2.2.1.3).

[11] Das sind die Collaterale, welche uns ein Counterpart zurückschickt oder stellt.

Ferner setzen wir voraus, einem Counterpart, der uns im Zeitpunkt der Umschichtung Collaterale zurückliefert, bei der Umschichtung keine Collaterale schicken zu müssen (vgl. 1.1.2). Diese Voraussetzung liefert die Disjunktheit von {CollOut} und {CollIn}. Für die Anzahl m der betrachteten Counterparts k gilt m = #{CollOut}+ #{CollIn}.
Wir streben minimale Umschichtungskosten und eine minimale Varianz des Portfolios P(2) an. Daher verallgemeinern wir die Definition der Zielfunktion von 2.2.1.1 zu:

Definition 2.2.2.1 (Allgemeine Zielfunktion)

Wieder sei XS ein zulässiger Startpunkt von dem aus optimiert wird. $V(X):=X^T*\Sigma ij*X$ und $c(X) := c^T*X$ die Varianz bzw. die Kosten in Abhängigkeit des Marktwertvektors X. Dann betrachten wir die verallgemeinerte Zielfunktion:

$$M(X) := a*V_{rel}(X) + b*c_{rel}(\Delta X) =: M_1(X) + M_2(\Delta X)$$

Dabei ist $V_{rel}(X)$ wie in 2.2.1.1 definiert und für $c_{rel}(\Delta X)$ gilt: $c_{rel}(\Delta X) := \frac{c(\Delta X)}{\left|c(XS - X(1))\right|} * 100$.

Für a und b gilt: $a,b \geq 0$ sowie $a+b=1$. Außerdem müssen wir jetzt V(XS) und $c^T*(XS-X(1))$ als von Null verschieden voraussetzen. Ferner seien die Matrix Σ^{rel} und der Vektor c_{rel} durch folgende Beziehung festgelegt:

$$\Sigma_{ij}^{rel} := \frac{100 * \Sigma_{ij}}{XS^T \Sigma_{ij} XS} \quad , \quad c_{rel} := \frac{100 * c}{\left|c^T (XS - X(1))\right|}$$

Damit läßt sich die allgemeine Zielfunktion schreiben in der Form:

$$M(X) = a * X^T \Sigma_{ij}^{rel} X + b * c_{rel}^T (X - X(1))$$

2.2.2.2 Anmerkung

Ist $c^T(XS-X(1))=0$ für jedes zulässige X, dann kann die Kostenfunktion vernachlässigt werden und die Zielfunktion ist wohldefiniert.

Die Zielfunktion läßt sich schreiben als: $a * \left(X_{(2)}^T \Sigma_{ij}^{rel} X_{(2)}\right) + b * \left(c_{rel}^T \Delta X\right)$. Mit obiger Definition erhalten wir in Abhängigkeit von X(2), (da $\Delta X = X(2)-X(1)$):

2.2.2.3 Umschichtungsproblem

$$a * \left(X_{(2)}^T \Sigma_{ij}^{rel} X_{(2)}\right) + b * \left(c_{rel}^T X_{(2)}\right) - \underbrace{b * \left(c_{rel}^T X_{(1)}\right)}_{\text{fest gegeben}}$$

Und für die Nebenbedingungen gilt:

1) $X_{(2)OTC} = h_{(2)}^{mp,1}$ konstant vorgegeben

2) $X_{(2)CLk} = \begin{cases} \geq X_{(1)CLk} & \text{falls } k \in \{\text{CollOut}\} \\ z_k + X_{(1)CLk} & \text{falls } k \in \{\text{CollIn}\} \end{cases} \quad \forall k \in \{1,\ldots,m\}$

3) $\left(c^T \Delta X \leq \Delta C\right) \Leftrightarrow c^T X_{(2)} \leq \Delta C + c^T X_{(1)}$

4a) $\sum_{i \in CLk} X_{(2)i} \begin{cases} \geq vB_k + \sum_{i \in CLk} X_{(1)i} & \text{falls k Receiver} \\ \leq vB_k + \sum_{i \in CLk} X_{(1)i} & \text{falls k Giver} \end{cases} \quad \forall k \in \{1,\ldots,m\}$

4b) $\sum_{i \in CLk} X_{(2)i} \begin{cases} \leq vB_k + \sum_{i \in CLk} X_{(1)i} + const_k & \text{falls k Receiver} \\ \geq vB_k + \sum_{i \in CLk} X_{(1)i} - const_k & \text{falls k Giver} \end{cases} \quad const_k \geq 0, \forall k$

5) $\sum_{i \in \{CL(1s),\ldots,CL(ms)\}} X_{(2)i} \leq g_s + \sum_{i \in \{CL(1s),\ldots,CL(ms)\}} X_{(1)i} \quad s \in \{1,\ldots,q\}$

6) $X_{(2)}^T \Sigma_{ij} X_{(2)} \leq V_{max}^{(2)}$

7) $X_{(2)i} \leq 0 \quad \text{falls } vB_k > 0, \text{ k Giver ist und } X_{(1)i} = 0$

Ist $X(1)=(0,\ldots,0)^T$, dann folgt $\Delta X = X(2)$ und wir erhalten 2.2.1.3 als Spezialfall.

Zusammenfassend sollen die einzelnen Restriktionen noch begründet werden:

1) Die OTC-Produkte können nicht variiert werden, sondern ergeben sich aus der aktuellen Handelssituation im neuen Portfolio.
2) Schickt ein Counterpart k Collaterale zurück oder stellt er weitere, dann liegt (mit $X_{CLk}(1)$ und z_k) auch $X_{CLk}(2)$ fest. Ansonsten (wir stellen oder schicken zurück) muß $X_{CLk}(2)$ mindestens so groß sein wie $X_{CLk}(1)$, kann aber im zulässigen Bereich bis zur Optimalität variiert werden.
3) Die Umschichtungskosten dürfen eine vorher festgesetzte Obergrenze nicht überschreiten. Von einem Counterpart zurückgeschickte oder zusätzlich gestellte Collaterale verringern unsere Umschichtungskosten, weil wir diese Collaterale weiterverwenden können. Und Collaterale die wir zurückschicken oder stellen müssen erhöhen die Umschichtungskosten.

4) Falls Counterpart k Receiver ist, dann addieren wir (modellbedingt) positive Collaterale mit negativen OTC-Produkten (Marktwerte) und diese Summe muß in dem unter 2.2.1.3 4) angegebenen Nettoexposureintervall liegen. Ist Counterpart k Giver, dann gilt dies analog. Die Restriktion 4a) läßt sich auch schreiben als (1) $\underset{i\in CLk}{X_{(2)i}} - \underset{i\in CLk}{X_{(1)i}} (\leq \text{ oder } \geq) \underbrace{d_k^{(2)} - \underset{i\in OTCk}{X_{(2)i}} - \underset{i\in CLk}{X_{(1)i}}}_{=vB_k}$ und das ist äquivalent mit

(2) $\underset{i\in(OTCk,CLk)}{X_{(2)i}} (\leq \text{ oder } \geq) d_k^{(2)}$. Damit wird der Zusammenhang zu 2.2.1.3 4) klar. Außerdem folgt für X(1)=0 aus (1) (und seinem 4b)-Analogon) direkt 2.2.1.3 4) als Spezialfall. Wir nennen vB_k den vereinbarten Betrag, der zwischen uns und Counterpart k transferiert werden soll. Dieser Wert ist im voraus bekannt und für die Aufstellung der Restriktionen anschaulicher. Der eigentliche Transferbetrag ist Gegenstand der Optimierung und kann von vB_k abweichen (vgl. 1.1.2 Theoretische Grundlagen). Allerdings nicht beliebig, deshalb wurden die zusätzlichen Restriktionen 4b) eingeführt, die eine mögliche Abweichung in einem zulässigen Rahmen halten. Strikte Gleichheit kann hier mit einer Konstanten von 0 erreicht werden. Ein weiterer Vorteil dieser Notation ist, daß der Anwender, abweichend von der rechnerischen Größe vB_k, einen in der Realität konkret vorgegebenen Wert vB_k verwenden kann, der wirklich transferiert werden soll. Dann ist aber strikte Gleichheit zu fordern, d.h. die zusätzlichen Restriktionen mit $const_k=0$.

5) Die Obergrenze, der für das Portfolio verfügbaren Collaterale, ergibt sich aus der Summe der beschaffbaren ($=g_s$) und der schon vorhandenen Collaterale (=X(1)).

6) klar

7) Diese Restriktionen sind nur bei der Portfolioumschichtung notwendig. Wir dürfen nämlich nur das zurückschicken, was wir vom Counterpart vorher erhalten haben. Ohne diese Restriktionen wäre es möglich, daß wir Collateraltypen zurückschicken, die uns nicht gestellt wurden ($X(1)_i=0$), aber vom Counterpart gestellte Collaterale zurückbehalten. Das Schicken unsererseits kennzeichnet $vB_k>0$ und das k Giver ist stellt sicher, daß es sich um ein Zurückschicken handelt. In Verbindung mit Restriktion 2) ($X(2)_i\geq 0$) liefert 7) ($X(2)_i\leq 0$) das gewünschte $X(2)_i=0$. Für die folgende kanonische Form des Optimierungsproblems definieren wir die Indexmenge **{not back}**, welche die Indizes i der betroffenen Collaterale enthält.

2.2.3 Kanonische Form des Umschichtungsproblems

Um gängige Algorithmen auf das Problem 2.2.2.3 anwenden zu können, werden hier die Nebenbedingungen von 2.2.2.3 (ohne die nichtlineare Restriktion[12] 6)) in kanonische Form überführt. Dies ist vor allem dann sinnvoll, wenn die Varianz in der Zielfunktion vorkommt (d.h. $a\neq 0$) und nicht noch zusätzlich als Restriktion berücksichtigt wird.

Für die Restriktionen 1) bis 7) gilt[13]:

1) $X_{OTC}=h$ ist äquivalent zu $X_{OTC} \leq h$ und $-X_{OTC} \leq -h$; in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} E_{OTC}^{mp,mp} & 0_{CL}^{mp,mq} \\ -E_{OTC}^{mp,mp} & 0_{CL}^{mp,mq} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} h \\ -h \end{pmatrix} \in IR^{2mp}$$

2) Wir definieren $r := (\#\{CollOut\}+2*\#\{CollIn\})$ und $M*X\leq z$ mit M aus IR^{rqxn} und z aus IR^{rq}, wobei für die m Blöcke M_k von M gilt:

$$M_k * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{cases} \left(0_{OTC}^{q,mp}, 0_{CL1}^{q,q} \ldots -E_{CLk}^{q,q}, 0_{CLk+1}^{q,q} \ldots 0_{CLm}^{q,q}\right) * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} \leq -X_{(1)CLk}^{q,1} & \text{falls } k \in \{CollOut\} \\ \begin{pmatrix} 0_{OTC}^{q,mp}, 0_{CL1}^{q,q} \ldots E_{CLk}^{q,q}, 0_{CLk+1}^{q,q} \ldots 0_{CLm}^{q,q} \\ 0_{OTC}^{q,mp}, 0_{CL1}^{q,q} \ldots -E_{CLk}^{q,q}, 0_{CLk+1}^{q,q} \ldots 0_{CLm}^{q,q} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} z_k^{q,1} + X_{(1)CLk} \\ -z_k^{q,1} - X_{(1)CLk} \end{pmatrix} & \text{falls } k \in \{CollIn\} \end{cases}$$

3) $c^TX \leq \Delta C + c^TX(1) \Leftrightarrow \left(0_{OTC}^{1,mp}, c_{CL}^{1,mq}\right) * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} \leq \Delta C + c^T X_{(1)}$

4) a) $M1a*X \leq d$ mit M1a aus IR^{mxn} wobei die k te Zeile von M1a, $M1a_k$ folgendes erfüllt:

$$\left(0_{OTC}^{1,mp}, 0_{CL1}^{1,q} \ldots -1I_{CLk}^{1,q}, 0_{CLk+1}^{1,q} \ldots 0_{CLm}^{1,q}\right) * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} \leq -vB_k - \sum_{i\in CLk} X_{(1)i} \text{ falls k Receiver}$$

$$\left(0_{OTC}^{1,mp}, 0_{CL1}^{1,q} \ldots 1I_{CLk}^{1,q}, 0_{CLk+1}^{1,q} \ldots 0_{CLm}^{1,q}\right) * \begin{pmatrix} X_{OTC} \\ X_{CL} \end{pmatrix} \leq vB_k + \sum_{i\in CLk} X_{(1)i} \text{ falls k Giver}$$

b) Analog, mit einer Matrix M1b aus IR^{mxn}.

[12] Will man die Varianz als nichtlineare Restriktion beibehalten, und nicht in der Zielfunktion verwenden, so läßt sich der verwendete Algorithmus geeignet modifizieren. Vgl. <Bazaraa 1993> S. 433ff.

[13] Der Einfachheit wegen sei X:=X(2)

5) $M2*X\le g$ mit M2 aus IR^{qxn} wobei die s te Zeile von M2, $M2_s$ (für jedes s=1...q) folgendes erfüllt:

$$\left(0^{1,mp}_{OTC},\ldots,\underbrace{0_{CL(k,1)}\ldots 1_{CL(k,s)},0_{CL(k,s+1)}\ldots 0_{CL(k,q)}}_{\text{Counterpart } k\equiv CLk\ \ \forall k\in\{1,\ldots,m\}},\ldots\right)*\begin{pmatrix}X_{OTC}\\ X_{CL}\end{pmatrix}\le g_s+\underset{i\in\{CL(1s),\ldots,CL(ms)\}}{X_{(1)i}}$$

6) siehe Einleitung zu 2.2.3

7) Wir definieren w:=#{not back}. M3*X<=0 mit M3 aus IR^{wxn} wobei die w Zeilen von M3 für jedes l aus {not back} folgendes erfüllen.

$$\left(0^{1,mp}_{OTC},0_{CL(1,1)},\ldots,0_{CL(k,1)}\ldots 1_{CL(k,l)}\ldots 0_{CL(k,q)},\ldots,0_{CL(m,q)}\right)*\begin{pmatrix}X_{OTC}\\ X_{CL}\end{pmatrix}\le 0$$

Insgesamt erreichen wir die kanonische Form der Restriktionen:

2.2.3.1

$$\begin{pmatrix} E^{mp,mp}_{OTC} & 0^{mp,mq}_{CL}\\ -E^{mp,mp}_{OTC} & 0^{mp,mq}_{CL}\\ M^{rq,mp}_{OTC} & M^{rq,mq}_{CL}\\ 0^{1,mp}_{OTC} & c^{1,mq}_{CL}\\ M1^{2m,mp}_{OTC} & M1^{2m,mq}_{CL}\\ M2^{q,mp}_{OTC} & M2^{q,mq}_{CL}\\ M3^{w,mp}_{OTC} & M3^{w,mq}_{CL}\end{pmatrix}*X\le\begin{pmatrix} h\\ -h\\ z\\ \Delta C+c^T X_{(1)}\\ vB+M1*X_{(1)}\\ g+M2*X_{(1)}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow:\qquad A*X\le e\ \text{ mit } A\in IR^{uxn}$$

wobei für u gilt[14]: u=2mp+rq+1+2m+q+w.

[14] Diese Berechnung gilt nur für den allgemeinsten Fall. Denn wenn wir z.B. nur einen Counterpart betrachten, dem wir Collaterale zurückschicken, dann sind die Restriktionen 5) (Beschaffungsgrenzen) meist nicht notwendig.

2.2.4 Modelldiskussion

2.2.4.1 Modellannahmen

1) Beliebig teilbare OTC-Produkte und Collaterale (vgl. 2.2.1.3 m))
2) Das Modell geht von einer einheitlichen Grundwährung (base currency) aus, d.h. falls in einem Portfolio auch andere Währungen vorkommen, müssen diese zuerst in die Grundwährung umgerechnet werden.
3) Collaterale die uns der Counterpart stellt oder zurückschickt werden alle weiterverwendet. Und sparen damit Beschaffungskosten ein oder erzielen Ertrag (vgl. 2.2.2).
4) Wir wissen vor der Optimierung, was uns der Counterpart schicken wird. Falls wir dies im Einzelfall nicht voraussetzen können, gehen wir vom „worst case“ aus, d.h. der Annahme, keine Collaterale zu bekommen und solche Portfolien werden bei der Optimierung vernachlässigt (siehe dazu 2.2.1.3 i)).
5) Wenn ein Counterpart Collaterale schickt, dann kann es nicht vorkommen, daß auch wir ihm Collaterale schicken (vgl. Abb. 1.1.2.1).
   Dies ist nur dann immer erfüllt, wenn wir für jeden Counterpart der Handelsarten 1) und 2) (mit einem Initial Margin größer als Null) zwei Portfolien betrachten (siehe Abb. 1.1.2.5).
   Die Annahme liefert die Disjunktheit der Indexmengen {CollOut} und {CollIn}.
6) Angenommen es sollen die Portfolien von m Counterparts zusammengefaßt werden, dann muß der zu optimierende Vektor X alle mit diesen Partnern gehandelten OTC-Produkte und alle Collateraltypen enthalten.

2.2.4.2 Modellanwendung

Bei der Modellanwendung ist die Modellannahme 5) von 2.2.4.1 zu beachten, was im Extremfall die Anzahl der Portfolien verdoppelt. Außerdem erhöht Voraussetzung 6) die Dimension von X enorm.

Der Vektor X(1) ändert sich mit den Marktverhältnissen. Das bedeutet, er kann unzulässig werden. Wir können ihn dann nicht als Startpunkt für die Optimierung wählen. Also auch wenn wir nur V(X) als Zielfunktion betrachten und somit X(1) = XS voraussetzen dürfen, müssen wir vorher einen zulässigen Startpunkt ermitteln.

Dies kann durch einen äußeren Simplexalgorithmus unter Berücksichtigung des linearen Teils der Zielfunktion geschehen oder aber mit der Ellipsoidmethode.

Ist die optimale Lösung nicht eindeutig, dann liefert der verwendete Algorithmus eine der möglichen Optimallösungen in Abhängigkeit der Lage des Startpunktes. Es ist nicht notwendigerweise die zum Startpunkt oder zu X(1) nächstgelegene Optimallösung (vgl. dazu die Veranschaulichung des Algorithmus im Anhang 5.2.1.).

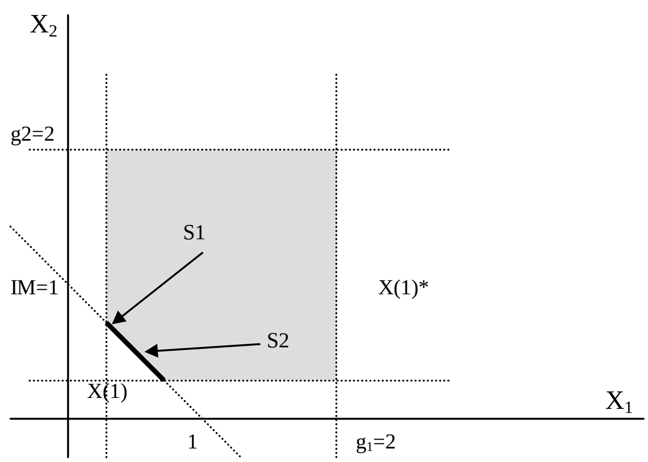
Auch die Vektoren c,g,d und die Matrix Σ_{ij} sind marktabhängig, jedoch im Umschichtungszeitpunkt fest gegeben.

Beispiel: Konstant zu haltender Initial Margin (=IM) bei aufgeteiltem Portfolio (vgl. Annahme 5)). Wir müssen Collaterale stellen und betrachten zwei Sicherheiten, ohne die konstanten OTC-Produkte, da in unserem Collateralportfolio, unabhängig vom Marktwert der OTC-Produkte, ein mindest IM erreicht werden muß. Die Kostenfaktoren c_1 und c_2 sind identisch (kein eindeutiger Lösungspunkt). Die Restriktionen lauten demnach:

(1) $X(2)_1+X(2)_2 \geq IM$, (2) $X(2)_1 \leq g_1$, $X(2)_2 \leq g_2$, (3) $X(2)_1 \geq X(1)_1$, $X(2)_2 \geq X(1)_2$.

Minimierung von $c^T=(1, 1)$ mit X(1)=(0.25, 0.25) und X(1)*=(2.5, 1) sowie Startpunkte S_1=(1, 1.25) und S_2=(1.5, 0.6). Der Optimalpunkt P_1 ist (1/4, 3/4) und P_2 entspricht (1/2, 1/2). X(1) wurde unzulässig weil wir nachliefern. X(1)* würde die Unzulässigkeit des Problems verursachen, denn so viele Sicherheiten vom Typ X_1 könnten derzeit für dieses Portfolio nicht beschafft werden.

Abb. 2.2.4.2.1 Restriktionen



Die Optimalmenge ist nicht einelementig. Der Optimalpunkt wird algorithmusbedingt ausgewählt. Bezüglich der Umschichtungskosten macht dies keinen Unterschied. Geeignet gewählt, liefert der Startpunkt die zu X(1) nächstgelegene Optimallösung (vgl. die Veranschaulichung des Algorithmus in 5.2.1).

Für den Anwender ist es sinnvoll, nach der Optimierung, für die leichtere Umschichtung des Portfolios $\Delta X = X(2) - X(1)$ zu errechnen (wird vom Mapleprogramm im Anhang 5.2.1 geleistet). X(2) ist die Gesamtmenge benötigter oder vorhandener Collaterale, X(1) ist die bisherige Menge *und ΔX_{CL} liefert die Änderungen pro Collateraltyp für jeden Counterpart* (genauer: für jedes Portfolio, da wir für einen Counterpart auch zwei Portfolien betrachten könnten. Z.B. Handelsart 1). Dadurch erkennt man die freigewordenen und zusätzlich benötigten Collaterale.

Hier können pro Collateraltyp zwei Fälle unterschieden werden:

1) Nachfrage ≥ Angebot: Der Portfoliomanager kann mit diesen Informationen zuerst die freigewordenen Sicherheiten ($\Delta X_i<0$) auf die Counterparts mit Nachfrage verteilen ($\Delta X_j>0$) und dann die zusätzlich benötigten Collaterale am Markt beschaffen (siehe X(1) von Abb. 2.2.4.2.1).
2) Nachfrage < Angebot: Der Portfoliomanager muß versuchen die überschüssigen Collaterale so zu verwenden, daß mindestens ein Ertrag in Höhe der Beschaffungskosten erziehlt wird, da sonst die lineare Kostenfunktion die Umschichtungskosten unterschätzt oder einen zu hohen Ertrag anzeigt.

Im obigen Beispiel wäre dies Fall 1): $\Delta X = P1 - X(1) = (1/4,\ 3/4) - (1/4,\ 1/4) = (0,\ 1/2)$. Das bedeutet für den Portfoliomanager bzgl. dieses Portfolios nichts von X1, und 1/2 vom Collateraltyp X_2 zusätzlich zu beschaffen.

Setzen wir hingegen a,b=1/2 und $\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, dann wird die geringere Varianz von Collateraltyp 1 berücksichtigt und wir erhalten P=(0.6, 0.4) als eindeutigen Optimalpunkt, unabhängig vom zulässigen Startpunkt S.

Auch **Bargeld (Cash)** eignet sich als Sicherheit. Cash in der Base Currency hat eine Varianz von Null und ist von den anderen Marktwerten unabhängig. Cash anderer Währungen hat, bedingt durch sich ändernde Wechselkurse, eine Varianz die größer ist als Null und ist nicht unabhängig von den anderen Marktwertbewegungen.
Die Kostenfaktoren ergeben sich aus den Nettokosten von reverse Repo's. D.h. wir erhalten die Repo Rate und die Collaterale für geliefertes Cash. Im Gegenzug entstehen uns aber Kosten bei der Beschaffung des Cash.

2.3. Algorithmus und Beispielrechnung

Der verwendete SLP-Algorithmus[15] (Successive Linear Programming) eignet sich wegen folgender Punkte:

1) Er stellt keine besonderen Anforderungen an die Matrix A und läßt auch redundante Restriktionen zu.
2) Außerdem konvergiert seine Lösungsfolge (bei quadratischer Zielfunktion) sicher gegen den Optimalpunkt.
3) Ferner eignet er sich für große Probleme mit vielen Restriktionen.
4) Der SLPA löst eine Folge linearer Subproblme, für die effiziente Algorithmen (Simplexalgorithmus oder Karmarkaralgorithmus), z.B. in Mathematica und Maple, implementiert sind.

[15] Ein entsprechendes Maple-Programm findet sich im Anhang 5.2.1.

2.3.1 Beispiel Kundenportfolio

Nachfolgend soll eine Checkliste der Optimierungsdurchführung und deren konkrete Anwendung für ein real existierendes Kundenportfolio vorgestellt werden.

1) Auflisten der Portfoliobestandteile (für jedes Teilportfolio gleich) mit aktuellen Marktwerten, die das aktuelle Portfolio X(1) repräsentieren. Festlegen der Base Currency

Für dieses Kundenportfolio:

OTC-Produkte			*Collaterale*			
Ref.nr.	*Bezeichnung*	*Marktwert*[16]	*ISIN*	*Bezchng.*	*Nominal*	*Marktwert*[17]
132633	*DM Zinsswap*	*7,098,400.56*	*US9128272K7*	*US Tsy 5.875%*	*4,0 Mio*	*103,2944*
132638	*DM Zinsswap*	*7,098,400.56*	*US912810EY0*	*US Tsy 6.5%*	*2,8 Mio*	*109,6885*
132664	*Dollar Zinsswap*	*8,267,267.97*	*US9128272R2*	*US Tsy 6.375%*	*13,2 Mio*	*103,1053*
135090	*Pfund Zinsswap*	*4,233,565.83*	*US912810DW5*	*US Tsy 7.25%*	*4,3 Mio*	*116,8665*
133655	*Lire Zinsswap*	*-452,386.72*	*ES0000011538*	*Spanish Gov Bond*	*0 Mio*	*115,62*
			IT0000367406	*Italian Gov Bond 7%*	*0 Mio*	*103,265*
			xxxxxx	*Cash in $ (Base Curr.)*	*0 Mio*	*100*

2) Historische Datenreihen der Kurswerte, möglichst langer, übereinstimmender Zeiträume, für jedes im Portfolio enthaltene Finanzinstrument.

Für das Kundenportfolio wurden gemeinsame Datenreihen täglicher Marktpreise vom 01.10.1997 bis zum 23.02.1998 verwendet.

[16] Marktwert in US-Dollar. Alle aktuellen Marktwerte beziehen sich auf den 23.02.1998.
[17] Marktwert in % des Nominalwertes, laut Collateral Management System.

3) Umrechnen der oben gewonnenen Marktwerte in die Base Currency, falls diese nicht schon in der Base Currency vorliegen. Das bedeutet die historischen Wechselkurse zu ermitteln oder aber mit einem konstanten Durchschnittswechselkurs umzurechnen. Dann werden aber die Bestandteile der Varianz und der Korrelationen, die auf Wechselkursänderungen zurückzuführen sind, vernachlässigt. Ob das Vernachlässigen der Wechselkursrisiken die Varianz signifikant beeinflußt kann im Rahmen dieser Arbeit aus Zeitgründen nicht untersucht werden.
Ein Ansatz, um gegebene Portfolien auf ihre Sensitivität gegenüber Wechselkursänderungen zu überprüfen, ist eine mehrdimensionale Regression des historischen Gesamtportfoliowertes (Base Currency) in Abhängigkeit der für das Portfolio relevanten historischen Wechselkurse.
Die resultierenden partiellen Regressionskoeffizienten verdeutlichen das potentielle Wechselkursrisiko bezüglich jeder im Portfolio enthaltenen Währung[18]. Allerdings ist diese Methode nur für Zeitintervalle sinnvoll, in denen die Art und Anzahl der beteiligten Währungen konstant blieb. Bei häufigem Wechsel der im Portfolio enthaltenen Währungen treten Probleme auf.

Im Kundenportfolio sind außer US-Dollar Sicherheiten (Wechselkurs=1, da Base Currency) nur Bonds in spanischen Peseten und italienischen Lire, mit Wechselkursen von 1$=155,01 Pesetas (24.3.98) und 1$=1799,20 Lire (24.03.98), enthalten.

4) Modifizieren der Collateralmarktwerte um die Haircutfaktoren.
Im Fall des Kundenportfolios waren alle Haircutfaktoren konstant 1.

5) Schätzung der Varianz-Kovarianz-Matrix unter Berücksichtigung der Nominalwerte.
Dazu gehört die Elimination von Ausreißern und das Auffinden von Datenfehlern. Außerdem sollte bei Collateralen und OTC-Produkten der modellbedingte Marktwert beachtet werden (muß nicht, weil sich die Vorzeichen beider Produktarten ändern). Dieser ist, falls wir Receiver sind, für die Collaterale negativ. Die historisch verfügbaren positiven Marktwerte müssen also für die Kovarianzschätzung mit einem negativen Vorzeichen versehen werden.

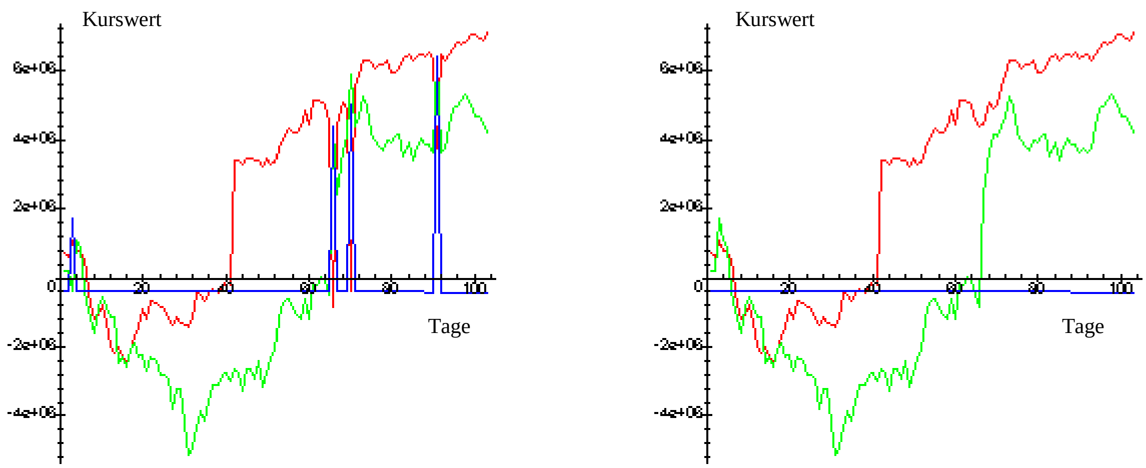
[18] Diesen Vorschlag machen <Copeland/Weston> in Chapter 22 E 1. (S. 823)

Im Anhang 5.2.2. findet sich dazu ein Mapleprogramm (für den Fall des Kundenportfolios). Bei den Datenreihen der OTC-Produkte aus dem Collateral Management System traten Fehler auf. Vereinzelt war die Reihenfolge der OTC-Marktwerte vertauscht worden. Dies machte ein korrektes maschinelles Einlesen ohne manuelle Überprüfung unmöglich (siehe nachfolgende Abbildungen).

Außerdem bestand das Problem, daß die historischen Bondkurse exklusive der Stückzinsen vorlagen aber inklusive nötig gewesen wären, weil bei der Besicherung dieser Kurs benutzt wird. Dies hat Einfluß auf die historische Schätzung der Varianz-Kovarianz-Matrix.

Da die Daten für die OTC-Produkte aus einer anderen Datenbank stammen als die der Bondkurse fehlten vereinzelt für bestimmte Tage, bei denen OTC-Kurse vorlagen, die entsprechenden Bondkurse.

Abb. 2.3.1.1 *OTC-Kurswerte (2,4 und 5) ohne und mit Korrektur*



6) Ermitteln der Kostenfaktoren c_i für jede zugelassene Sicherheit i=1..q

Im betrachteten Kundenportfolio ist q=7. Die täglichen Refinanzierungs- und Repo Raten können, <u>für von der Bank gehandelte Bonds,</u> über Bloomberg ermittelt werden. Problematisch ist, daß Bonds die wir vom Counterpart gestellt bekommen nicht unbedingt von uns gehandelt werden (6 bis 8). Außerdem kann es vorkommen, daß selbst für gehandelte Bonds nur aktuelle Repo Rates verfügbar sind, da die historischen Daten nicht gespeichert wurden (9).

Collateraltyp	Refinanzierungssatz	Repo Rate	Kostenfaktor
US9128272K7 = 6	N/A	N/A	0,13% geschätzt
US912810EY0 = 7	N/A	N/A	0,13% geschätzt
US9128272R2 = 8	N/A	N/A	0,13% geschätzt[19]
US912810DW5 = 9	5,63%	5,5%	0,13%
ES0000011538 = 10	5%	4,465%	0,535%
IT0000367406 = 11	6,65%	5,745%	0.905%
Cash in $ = 12	5,63% geschätzt[20]	0%	5,63%

7) Festlegen der Priorität durch die Gewichte a und b der Zielfunktion

Hier wurde a=0.75 und b=0.25 bzw a=1 und b=0 gewählt. Die Varianz wird übergewichtet, weil die Kostenfaktoren nicht genauso zuverlässig geschätzt werden konnten. Bei den ersten drei Sicherheiten wurde angenommen, daß sie dasselbe kosten wie Collateral 9, weil es sich dabei auch um Treasury Bonds handelt.

8) Bestimmen der relevanten Restriktionen, d.h. Matrix A und Vektor e ermitteln (mit Hilfe von 2.2.2.3 und 2.2.3). Dazu gehören auch die im Portfolio enthaltenen Handelsarten, um die Nettoexposuregrenzen (bzw. die vereinbarten Beträge vB) festzustellen.

Beim Kundenportfolio haben wir Handelsart 3) mit IM=0 (vgl. 1.1.2). Unsere Nettoexposuregrenze ist 2,5 Mio $.

[19] Geschätzt durch den Kostenfaktor von Collateral 9.
[20] Geschätzt durch die $-Cashbeschaffungsrate des Collaterals 9, daß auch mit Dollar beschafft wurde.

9) Ermitteln eines zuläsigen Startpunktes „start“, so daß die Zielfunktion definiert ist. Vergleiche 2.2.2.1.

10) Einlesen der Daten in eine Textdatei (siehe 5.2.).

Obige Checkliste zeigt auf, welche Datenquellen für die Portfoliooptimierung zur Verfügung gestellt werden müssen. Oft ist es so, daß zwar die aktuellen Daten immer verfügbar sind, aber nicht die historischen. Deshalb zeigt die Checkliste, welche Daten in Zukunft gespeichert werden müssen, um die Optimierung zügig durchführen zu können.

2.3.2 Szenarien

2.3.2.1 Freiwillig zurückschicken?

Zuerst wurde am aktuell gegebenen Portfolio (23.02.1998) untersucht ob das Modell rät Collaterale zurückzuschicken. Unser aktuelles Nettoexposure betrug am 23.2.98: 407.035,10 $. D.h. wir hätten freiwillig bis zu (2.500.000 - 407.035,10) = 2.092.964,90 $ zurückschicken können. Der Gesamtmarktwert der Collaterale betrug 25.838.213,10 $.

Hinsichtlich der Kosten wäre dies nicht sinnvoll, da Zurückschicken modellbedingt Kosten verursacht. Beim Zurückschicken ist es nur möglich, daß danach weniger oder gleich viele Collaterale im Portfolio verbleiben.

Der Algorithmus hätte in diesem Fall, freiwillig, keine Collaterale zurückgeschickt (man hätte ihn mittels der zusätzlichen Restriktionen von 2.2.2.3 4b) dazu zwingen können) und empfiehlt somit X_1 beizubehalten. Dies zeigt, daß wir aus Varianzgründen eher noch mehr Collaterale gewollt hätten.

Die genauen Ergebnisse stehen unter 2.3.3, und die verwendeten Restriktionen stehen in Matrixform im Anhang unter 5.2.4.1.

2.3.2.2 Neuerstellung

a) Wir tun so, als ob wir am 23.2.98 auf der Seite des Counterparts stünden und stellen Collaterale bei der fiktiven Neuerstellung. Die Varianz-Kovarianz-Matrix kann beibehalten werden, aber bei den Restriktionen sind die neuen Vorzeichen (modellbedingt) zu beachten.

Zusätzlich, zu der aus dem maximal zulässigem Nettoexposure folgenden Restriktion:

$X_6+...+X_{12} \geq 23.745.248{,}20$ (vgl. Restr. 4a) von 2.2.2.3), benutzen wir die Restriktion 4b), welche sicherstellt, daß wir nicht mehr Collaterale (im Gesamtmarktwert gemessen) stellen, als sie der Counterpart am 23.02.98 gestellt hatte. Somit $X_6+...+X_{12} \leq 25.838.213{,}10$. Eine Beschaffungsgrenze wurde im vorliegenden Fall nicht angenommen.

Außerdem wurde X_1 von 2.3.2.1 als Startpunkt der Optimierung gewählt, um die Verbesserungsmöglichkeiten gegenüber den vom Counterpart gestellten Collateralen festzustellen. Auch diese Ergebnisse stehen in der Tabelle des Abschnitts 2.3.3.

b) Hier fügen wir eine Beschaffungsgrenze für Collateral 7 in Höhe von 15.000.000 $ ein.

c) Zusätzliche Beschaffungsgrenze für Collateral 9 in Höhe von 7.000.000 $.

Dabei stellte sich heraus, daß der Algorithmus aufgrund der Kostenobergrenze Collateral 10 nicht so berücksichtigen konnte wie er es getan hätte, wenn die Kostenobergrenze höher gewesen wäre. Nachdem diese erhöht wurde, war er in der Lage statt Collateral 6 Collateral 10 zu verwenden (2.3.3.1). Die verwendeten Restriktionen in Matrixform befinden sich im Anhang unter 5.2.4.2.

2.3.2.3. Wir müssen zurückschicken

a) Am 27.02.1998 fand für das Kundenportfolio eine Substitution statt. Dieser Vorgang bedeutet, daß wir dem Counterpart Collaterale schicken und er uns im Gegenzug andere Collaterale zur Verfügung stellt. Dies berücksichtigt unser Modell zwar nicht explizit, wir können aber so tun als müßten wir einen festen Betrag vB zurückschicken. Der Algorithmus wählt bzgl. der Zielfunktion optimal. Da wir nicht wissen, was uns der Counterpart als Ersatz überläßt, würden wir dies auch nicht berücksichtigen. Nach dem Tausch fügen wir das erhaltene Collateral in die Struktur von X ein. Um weiterzurechnen, benötigen wir daher eine neue Varianz-Kovarianz-Matrix.

Tatsächlich schickten wir am 27.02.98 US9128272K7 (Collateral 6) zu 4 Mio $ nominal = 4.131.520 $ zurück. Damit erhalten wir als zulässigen Startpunkt[21] start=($X(1)_1$,..., $X(1)_5$, 0, $X(1)_7$,..., $X(1)_{12}$). Alle Werte resultieren aus den Marktwerten vom 27.02.98. Genau dieses Collateral empfiehlt auch der Algorithmus (2.3.3.1). Dafür erhielten wir vom Counterpart 4,15 Mio $ nominal des Collaterals US912827Q62 zu 102,2885.

b) Am 03.03.1998 substituieren wir wieder, und zwar schicken wir 2,8 Mio $ nominal = 3.029.734,4 $ von US912810EY0, das ist Collateral 7, zurück. Startpunkt der Optimierung ist somit: ($X(1)_1$,..., $X(1)_5$, $X(1)_6$, 0, $X(1)_8$,..., $X(1)_{12}$). Der Algorithmus hätte stattdessen 3.029.734,4 $ vom neu eingefügten Collateral 6 zurückgeschickt.

[21] Wir nehmen an, genau diesen Betrag zurückschicken zu müssen und passen unsere Restriktionen (4a und 4b) entsprechend an.

2.3.3 Ergebnisse

2.3.3.1 Ergebnisstabelle (M_1(start)=100*a, M_2(start)=100*b)

Szenario	Verb.	M_1 %	M_2 %	a	b	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
2.3.2.1	0			1	0				X(1)			
	0 | 0			0,75	0,25				beibehalten			
2.3.2.2 a	6,1	93,925	0	1	0	0	25.838.213	0	0	0	0	0
	4,0 | 2,0	70,971	22,975	0,75	0,25	0	23.745.248	0	0	0	0	0
2.3.2.2 b	5,5	94,547	0	1	0	0	15.000.000	0	10.838.213	0	0	0
	3,7 | 2,0	71,350	22,975	0,75	0,25	0	15.000.000	0	8.745.248	0	0	0
2.3.2.2 c	4,4	95,552	0	1	0	3.838.133	15.000.000	0	7.000.000	80	0	0
**	4,6	95,397	0	1	0	0	15.000.000	0	7.000.000	3.838.213	0	0
	3,3 | 2,0	71,693	22,975	0,75	0,25	1.745.248	15.000.000	0	7.000.000	0	0	0
**	3,3 | 2,0	71,693	22,975	0,75	0,25	1.745.248	15.000.000	0	7.000.000	0	0	0
2.3.2.3 a		dieselbe		1	0	0	-3.027.480	-13.605.279	-4.968.615	0	0	0
		Collateralstruktur		0,75	0,25	0	-3.027.480	-13.605.279	-4.968.615	0	0	0
2.3.2.3 b	0,8	99,229	0	1	0	-1.215.517	-3.029.734	-13.601.676	-4.932.710	0	0	0
	0,6 | 0	74,422	25	0,75	0,25	-1.215.517	-3.029.734	-13.601.676	-4.932.710	0	0	0

** Hier wurde die bisherige Kostenobergrenze, die bei c^T*X(1) = 33.590$ lag (X(1) von 2.3.2.1 wegen der Vergleichbarkeit!), durch 60.000$ ersetzt. Dadurch wurde für den Algorithmus ein höherer Betrag des teueren Collaterals 10 zulässig.

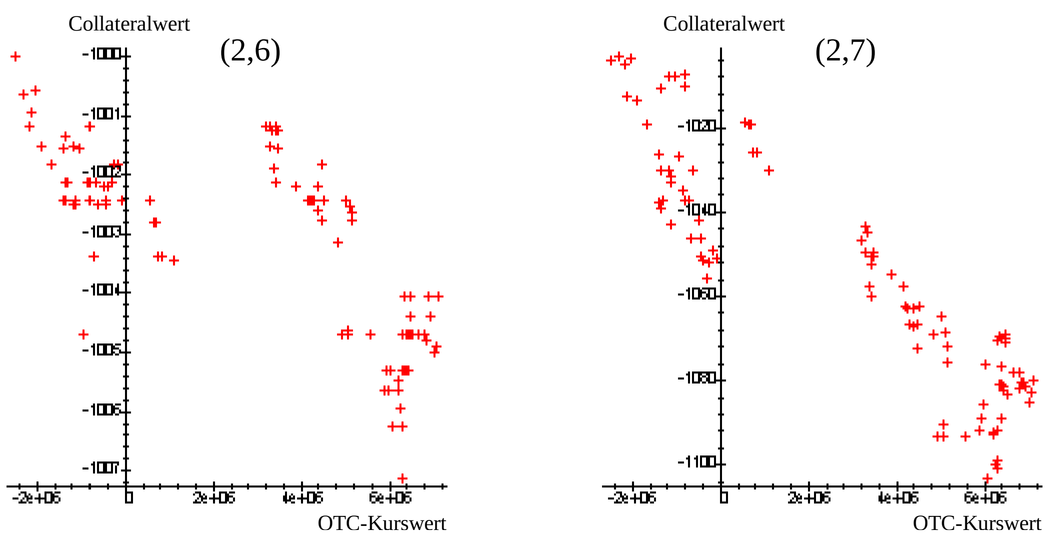
2.3.3.2 Anmerkungen

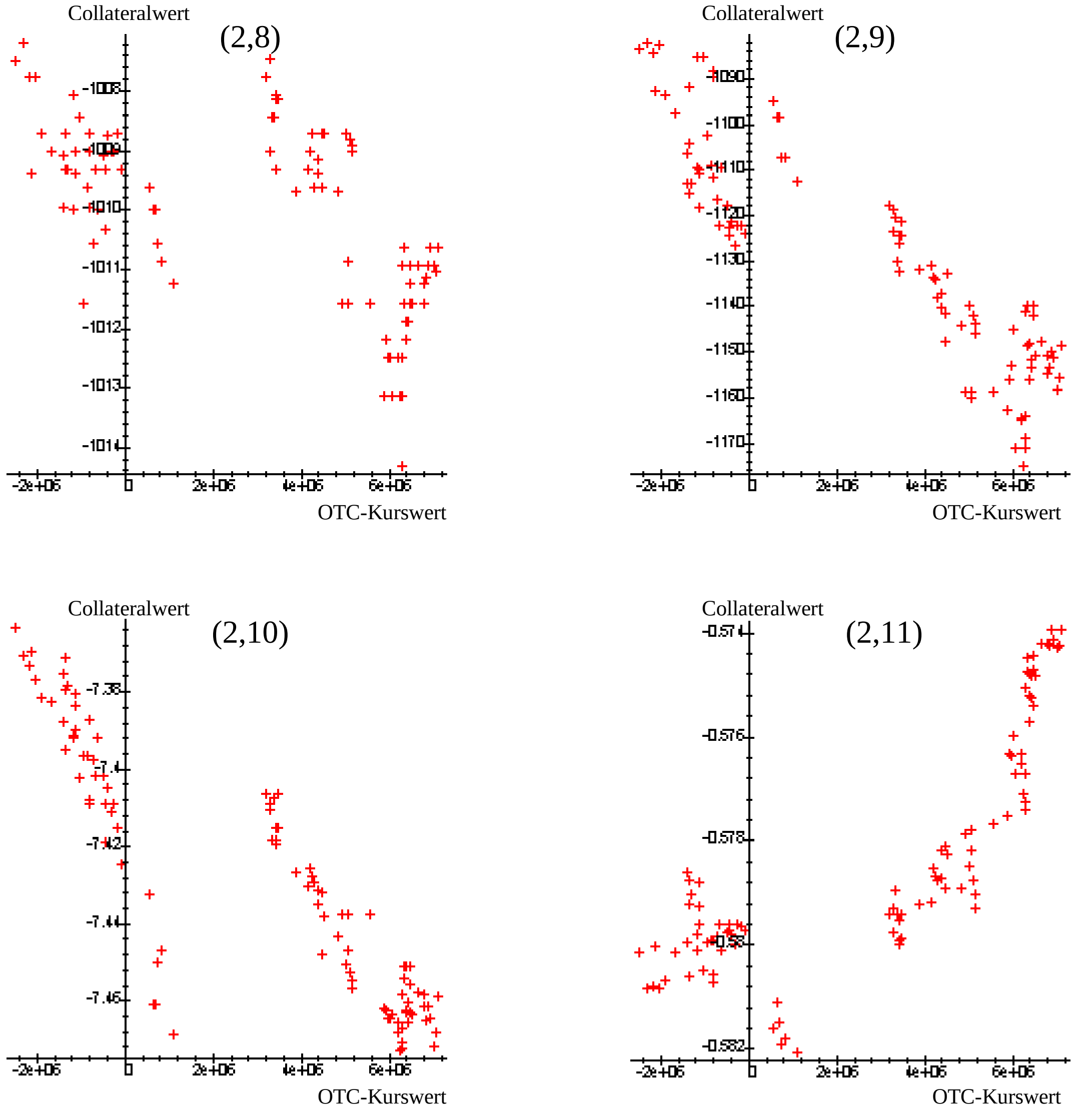
Die Ergebnisse der Optimierung sind mit ca. 5% Verbesserung auf den ersten Blick nicht überwältigend. Dabei muß aber berücksichtigt werden, daß die Grundmenge der Collaterale nur um zwei Collateraltypen erweitert wurde. Außerdem schnitten im Vergleich die bereits vorhandenen Treasury Bonds sowohl bezüglich der Varianz als auch bezüglich der Kosten gut ab. Dies schränkte den Optimierungsspielraum ein. Hinzu kommt, daß sich die Treasury Bonds untereinander, hinsichtlich Korrelation und Kosten, nicht wesentlich unterschieden (siehe Abb. 2.3.3.2.1 und 2.3.1 Punkt 6)).

Ferner war es, trotz großer Bemühungen, nicht möglich verläßlichere Daten für die Schätzung der Kostenfaktoren zu bekommen, was zeigt, daß hier in Zukunft ein besseres Recording aufzubauen ist. Dafür war verantwortlich, daß es sich um ein Portfolio handelte, bei dem uns der Counterpart Collaterale stellt. Der Counterpart stellt mit hoher Wahrscheinlichkeit Sicherheiten, die er selbst nicht benötigt, d.h. selten handelt. Gehen wir davon aus, daß auch wir solche Sicherheiten selten handeln, wird klar warum für die vom Counterpart gestellten Collaterale kaum Daten zu beschaffen waren (siehe 2.3.1 6)).

Bei vorliegendem Beispiel stellte sich heraus, daß es lohnend ist eine Vorauswahl möglicher Collaterale mit Hilfe von Scatterplots zu treffen. Dabei werden Collaterale günstiger historischer Korrelation erkennbar und der Anwender kann es vermeiden die Dimension des Problems unnötig zu erhöhen. Dies soll anhand einiger Collaterale des betrachteten Kundenportfolios veranschaulicht werden. Nachfolgende Abbildungen zeigen Scatterplots Zwischen OTC-Produkt 2 und den Collateralen 6 bis 11

Abb. 2.3.3.2.1 Scatterplots





Die Abbildungen stellen auf der senkrechten Achse die Kurswerte der Sicherheiten bezüglich des Nominalwertes 1000 in US-Dollar umgerechnet dar. Auf der horizontalen Achse sind die OTC-Kurswerte angetragen. Die uns gestellten Collaterale des Kundenportfolios haben modellbedingt, aus unserer Sicht negative Kurswerte. D.h. eine günstige Korrealtion tritt dann auf, wenn der Kurswert des Collaterals, bei steigendem OTC-Kurswert, negativer wird.

Diesbezüglich hat die letzte Sicherheit 11 die ungünstigste Korrelation. Da sie auch bei den Kosten schlecht abschneidet, ist sie kein Kandidat, den man bei der Optimierung berücksichtigen müßte. Dasselbe gilt für den nicht aufgeführten Collateraltyp 12, da Cash der Base Currency unabhängig von Kursentwicklungen ist (vgl. 2.2.4.2).

Diese Beurteilung kann natürlich nicht ohne Betrachtung der übrigen OTC-Produkte geschehen. In diesem Fall waren die maßgebenden OTC-Produkte (1 bis 4) stark positiv miteinander korreliert, so daß OTC-Produkt 2 repräsentativ für diese Gruppe gewählt wurde. OTC-Produkt 5 verhielt sich gegenüber den anderen unkorreliert.