

3. Value at Risk für Collateralised Trading

Der Value at Risk (=VaR) ist derzeit das populärste Risikomaß für Markt- und Kreditrisiken. Es bestehen jedoch erhebliche Unterschiede in den Berechnungsarten. Von der einfachen linearen bzw. quadratischen Approximation¹ über analytische Ansätze mittels stochastischer Differentialgleichungen² bis zur ausgefeilten Simulationstechnik, reichen die derzeit angewandten Methoden zur Berechnung des Marktrisikos. Die Erfassung des Kreditrisikos mittels VaR ist relativ neu und wird derzeit von J.P. Morgan im System CreditMetrics³ weiterentwickelt. Dabei wird nicht versucht ein kombiniertes Modell für den VaR bestehend aus Markt- und Kreditrisiko abzuleiten sondern es werden Wertänderungen eines Portfolios betrachtet, die auf Ratingänderungen (ein Maß für Kreditrisiken) zurückzuführen sind. Klar ist, daß ein solcher Ansatz hauptsächlich Instrumente betrachtet, die in besonderem Maße einem Counterpartkreditrisiko ausgesetzt sind. Dazu zählen u.a. Bonds, Kredite und Swaps.

3.1. Begriffserläuterung

In dieser Diplomarbeit benutzen wir den Begriff VaR wie folgt:

3.1.1 Definition Value at Risk

Wir betrachten ausschließlich mögliche Marktwertänderungen des Portfolios P innerhalb des Zeitraums T. Dann ist $VaR(P, \alpha, T)$ die maximal ungünstige Marktwertänderung ΔMw , welche mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\alpha$ innerhalb dieses Zeitraums nicht überschritten wird.

Mathematisch: $P(\Delta Mw > VaR(P, \alpha, T)) = \alpha$.

Aus Definition 3.1.1 leiten sich einige Vorteile des VaR gegenüber der Varianz als Risikomaß ab.

¹ Siehe <RiskMetrics 1996> Chapter 6.3.2 und 6.3.3 (Part III) unter der Website von J.P. Morgan: <http://what.inet.jpmorgan.com/RiskManagement/RiskMetrics/pubs.html>

² Siehe: <Cardenas / Fruchard 1997>.

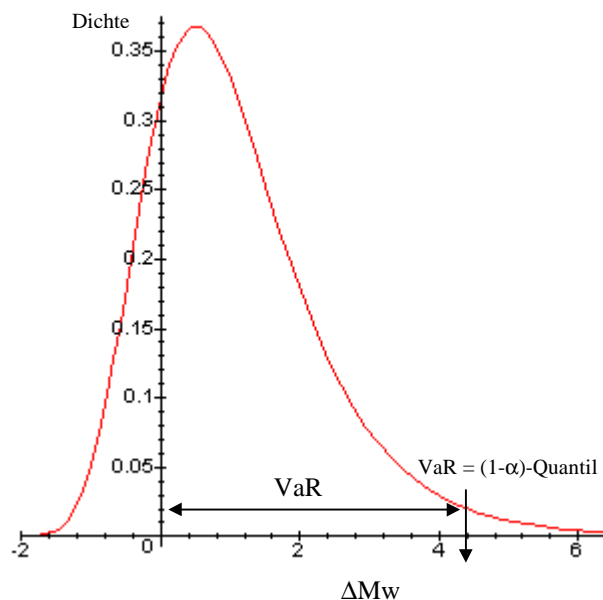
³ Siehe <CreditMetrics 1997>, <http://www.jpmorgan.com/RiskManagement/CreditMetrics/CreditMetrics.htm>

3.1.2 Folgerung

- 1) VaR berücksichtigt das intuitive Verständnis von Risiko als Möglichkeit des Verlustes.
- 2) VaR berücksichtigt die Höhe der Risikoposition.
- 3) VaR ist im Gegensatz zur Varianz auch für unsymmetrische Verteilungen geeignet.
- 4) Die Varianz kann bei verschiedenen Verteilungen (z.B. Cauchy Verteilung) unendlich groß sein. Und das hauptsächlich bei leptokurtotischen Verteilungen, die sich besser zur Modellierung extremer Kursausschläge eignen als die Normalverteilung.

Beim Collateralised Trading interessieren uns hauptsächlich positive Marktwertänderungen, die unser Nettoexposure (vgl. 1.1.2.4) erhöhen könnten. Bei Ausfall des Counterparts sähen wir uns dann den entsprechenden Ersatzkosten gegenüber.

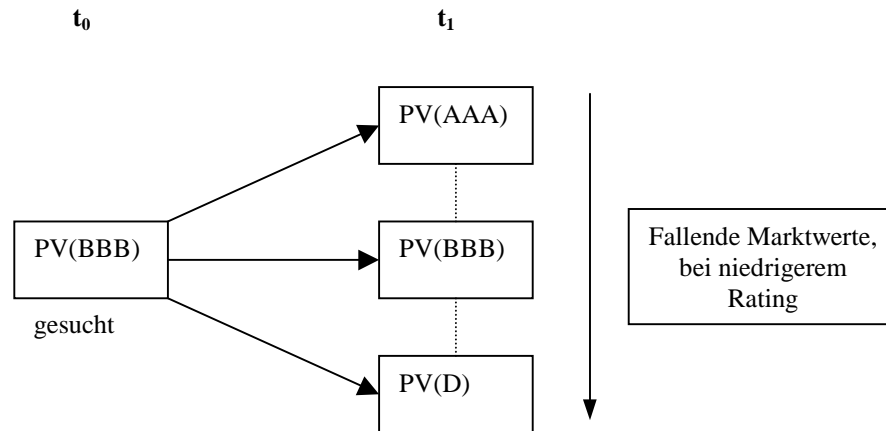
Abb. 3.1.2 Value at Risk



Bei Berechnung unseres VaR werden wir nicht die durch Ratingänderungen eines Counterparts verursachten Portfoliowertänderungen berücksichtigen, da das beim Collateralised Trading nicht immer sinnvoll ist und darüber hinaus erheblich mehr Aufwand erfordert. Dies soll im folgenden am Beispiel eines Swaps begründet werden.

Dazu betrachten wir einleitend die Marktbewertung eines Bonds abhängig vom Rating, weil ein Swap als Kombination zweier Bonds aufgefaßt werden kann.

Abb. 3.1.3 Bondbewertung



Die Abbildung zeigt den Marktwert eines Bonds mit BBB Rating in t_0 und allen möglichen Ratingklassen in t_1 , D steht für Default und die Äste des Baumes werden mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten belegt. Jede Ratingklasse hat ihre Forward Rates zum Abzinsen. Die Cash Flows bleiben, bis auf den Defaultfall D, dort ist die Recovery Rate entscheidend, gleich.

Angenommen, daß Rating berücksichtigt wird. Betrachten wir jetzt einen Zinsswap mit für uns positivem Marktexposure M und wird unser Counterpart im Rating schlechter, dann sinkt M und wir schicken Collaterale zurück, obwohl die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit ansteigt und wir mehr Collaterale fordern sollten. Beim klassischen Portfolioansatz (Marktwert der Assets) wäre der Wertverfall des Swaps eingetretenes Risiko und der geringere Marktwert müßte berücksichtigt werden. Das Problem ist, daß wir Ersatzkosten betrachten bzw. potentielle Ersatzkosten mit dem aktuellen Marktexposure messen. Das aktuelle Marktexposure (=aktueller Marktwert) ist aber nur ein Schätzer für potentielle Ersatzkosten. Dies bedeutet, wir müßten die Ratingklasse zukünftiger Ersatzpartner betrachten. Gehen wir von der Annahme aus, der Ersatzpartner verfüge über das gleiche Rating wie der aktuelle Counterpart nach seinem Downrating, dann stimmt das neue Marktexposure mit den potentiellen Ersatzkosten tatsächlich in dieser Hinsicht überein und die Betrachtung des Kreditrisikos wäre sinnvoll.

Da wir aber eher von der Annahme ausgehen müssen, mit einem Partner handeln zu wollen, der über das bisherige Rating verfügt, können wir von einem konstanten Rating ausgehen und die Berücksichtigung von Ratingänderungen ist deshalb unnötig.

3.2 Portfoliomodell und dynamische Kursmodelle

Verglichen mit dem Optimierungsmodell vereinfacht sich das Portfoliomodell des VaR, weil wir uns bei der internen Kalkulation des Risikos nicht an gesetzliche Vorschriften halten müssen⁴. Wir fassen alle betrachteten Counterparts in einem einzigen Portfolio zusammen und führen jetzt (im Gegensatz zum Optimierungsmodell) ein Crossnetting zwischen den Counterparts durch. Von Seiten der Theorie steht es uns frei nur OTC-Produkte zu berücksichtigen oder noch zusätzlich die Collaterale.

Bei der Berechnungsart des VaR wurde eine modifizierte Monte Carlo Simulation gewählt.

Die Wahl der Methode⁵: Approximation, Stochastische Differentialgleichungen oder Simulation, hängt von den zu messenden Finanzinstrumenten ab. Handelt es sich um Produkte, die sich ausreichend linear oder quadratisch verhalten, bzw. nur sehr kurze Zeiträume betrachtet werden, dann eignet sich die Approximation gut. Bei der Berechnung des VaR über stochastische Differentialgleichungen werden Varianz und Erwartungswert als konstant⁶ vorausgesetzt. Außerdem muß für die Zufallsbewegungen ein Wienerprozeß⁷ vorausgesetzt werden (Normalverteilungsannahme). Um möglichst viele Produkte flexibel behandeln zu können, was bei Collateralised Trading notwendig ist, und nicht auf die Normalverteilungsannahme angewiesen zu sein, wurde die Simulationsmethode gewählt.

Folgende drei Modellarten sind derzeit gebräuchlich um die Kursverläufe von Aktien Zinsen und anderen wertbestimmenden Faktoren zu beschreiben. Dabei nimmt die Prognosegüte, aber auch die Komplexität der Parameterschätzung mit jedem Modell zu. Die Modelle wurden unabhängig voneinander definiert, was bedeutet das z.B. die jeweils aufgeführten Zufallsvariablen ε über die Modelle hinweg keine Gemeinsamkeit haben.

Bevor wir die möglichen Modelle betrachten, soll der Begriff Prozeß, wie er hier verwendet wird, geklärt werden.

⁴ Dies ändert sich wenn wir das Risikomodell durch das BAKred genehmigen lassen wollen, um es statt der im KWG vorgeschlagenen statischen Methoden zu verwenden. Dabei müssen wir auch berücksichtigen, daß solche Modelle laut KWG automatisch mit dem Faktor 3 zu versehen sind. Eine Rechtfertigung dieses Faktors findet sich in <Stahl 1997>.

⁵ Einen praxisorientierten Vergleich der Methoden Approximation und Simulation bietet <Smithson 1996>.

⁶ Siehe <Cardenas / Fruchard 1997>.

⁷ Diese Annahme ist zur Verwendung des Lemmas von Ito notwendig, welches die stochastische Integrierbarkeit von Wienerprozessen sicherstellt. Siehe <Neftci 1996> S. 173ff und 194ff.

Ein **(Zufalls)-Prozeß** ist eine Folge von Zufallsvariablen $\{y_t\}$ denen eine gemeinsame Gesetzmäßigkeit zugrunde liegt. Der Parameter t steht für den Zeitablauf. Die **Zeitreihe** (y_t) ist eine Realisation dieses Prozesses. Ferner benutzen wir für die Zufallsvariable $y_t \in \{y_t\}$ und deren Realisation $y_t \in (y_t)$ dasselbe Symbol. Der Unterschied sollte aus dem Kontext klar werden.

3.2.1 ARMA Modell

Das **VARMA(p,q) Modell** (Vector Autoregressive Moving Average) hat folgende Form:

$$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + u_t \quad (\text{VAR-Prozeß})$$

mit

$$u_t = \varepsilon_t + \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (\text{VMA-Prozeß})$$

y , ε und μ aus \mathbb{R}^N , Φ und Θ aus $\mathbb{R}^{N \times N}$, $\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$ und für die Varianz-Kovarianz-Matrizen gilt: $E(\varepsilon_i * \varepsilon_j^T) = 0$ falls $(i \neq j)$ und andernfalls $E(\varepsilon_i * \varepsilon_i^T) = \Sigma_\varepsilon$. Die ε sind also zeitlich unkorreliert.

Die Indizes p und q geben die **Ordnung** der jeweiligen Prozesse an. Der Prozeß $\{y_t\}$ ist ohne Zusatzbedingungen an die Matrizen Φ nicht schwach stationär (siehe <Hartung 1985>).

Schwach stationär heißt, daß $\{y_t\}$ einen konstanten Erwartungswertvektor und eine konstante Varianz-Kovarianz-Matrix hat. Außerdem muß gelten: $E(y_{t_1} * y_{t_2}^T) = E(y_{t_1+k} * y_{t_2+k}^T)$ für alle t_1, t_2 und k . Der Zeitunterschied k zwischen t_{1+k} und t_1 wird als **lag k** bezeichnet.

Für den bedingten Erwartungswert und die Varianz von y_t bei gegebener **Informationsmenge** Y_{t-1} zum Zeitpunkt $t-1$ gilt:

$$E(y_t | Y_{t-1}) = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \text{und} \quad V(y_t | Y_{t-1}) = \Sigma_\varepsilon$$

Analog erfüllen der bedingte Erwartungswert und die Varianz von u_t :

$$E(u_t | Y_{t-1}) = \Theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \Theta_q \varepsilon_{t-q} \quad \text{und} \quad V(u_t | Y_{t-1}) = \Sigma_\varepsilon$$

Beide Zufallsvariablen, $y_t | Y_{t-1}$ und $u_t | Y_{t-1}$, sind normalverteilt. Die konstante Varianz (= **Homoskedastizität**) ist ein Nachteil, dafür lassen sich die Modellparameter einfacher schätzen als bei den noch folgenden Modellen. Dies gilt vor allem dann, wenn die Matrizen Φ und Θ als Diagonalmatrizen vorausgesetzt werden. Eine solche Annahme bedeutet, daß sich die N Zeitreihen nur über die korrelierten Elemente der Zufallsvektoren ε_t gegenseitig beeinflussen. Eine ausführliche Abhandlung dieser Modelle bietet <Lütkephol 1993>.

Empirische Zeitreihen von Risikofaktoren, wie Zinsen und Aktienkurse, weisen (vor allem bei längerer Betrachtung) keine konstante Varianz auf. Die Eigenschaft einer sich ändernden Varianz wird als **Heteroskedastizität** bezeichnet. Man beobachtet außerdem **Clustering**, was heißt, daß sich Perioden hoher und niedriger Wertänderungen zusammenlagern und die Übergänge gut unterscheidbar sind (vgl. dazu Abb. 3.2.4.1 und <RiskMetrics 1996> Chapter 4.3.1).

Aus diesem Grund wurden die folgenden Modelle entwickelt (3.2.2 und 3.2.3):

3.2.2 GARCH Modell (Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity)

Das mehrdimensionale **GARCH Modell** hat die Form:

$$y_t = \mu + \Phi_1 * y_{t-1} + \dots + \Phi_p * y_{t-p} + \varepsilon_t$$

mit $\varepsilon_t | Y_{t-1} \sim N(0, H_t)$ und

$$\text{vech}(H_t) = \Gamma + \sum_{i=1}^q \Theta_i \text{vech}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^r \Omega_j \text{vech}(H_{t-j})$$

vech bildet einen Vektor aus den Spalten des unteren Teils einer symmetrischen Matrix⁸. Ferner gilt: Φ_i, H_t aus $\mathbb{R}^{N \times N}$; y_t, ε_t, μ aus \mathbb{R}^N ; $\text{vech}(H), \Gamma$ aus $\mathbb{R}^{0.5 * N * (N+1)}$ und Θ_i, Ω_i aus $\mathbb{R}^{0.5 * N * (N+1) \times 0.5 * N * (N+1)}$. μ kann als konstanter Aufwärts- oder Abwärtstrend interpretiert werden. Im Gegensatz zum VARMA Modell ist die bedingte Varianz von y_t, H_t , nicht mehr konstant sondern wird von einer deterministischen Differenzgleichung bestimmt. Haben die Matrizen Φ_i Diagonalform, dann beeinflussen sich die Elemente des Vektors y_t gegenseitig nur über die Kovarianzen des Zufallsvektors ε_t . Diese Vereinfachung ist auch für den Prozeß von H_t möglich, was die Mischterme aus den $0.5 * N * (N+1)$ Zeitreihen entfernt.

Die hier noch geforderte Normalverteilttheit des Zufallsvektors $\varepsilon_t | Y_{t-1}$ werden wir im vereinfachten Modell durch eine allgemeinere Verteilung, die extreme Kursausschläge besser abbildet, ersetzen.

⁸ Beispiel: $M := \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ dann gilt $\text{vech}(M) = (a, c, b)^T$.

3.2.3 SV Modell (Stochastic Volatility)

Im Gegensatz zu GARCH-Modellen geht man hier davon aus, daß die Varianz-Kovarianz-Matrix H_t einem stochastischen Prozeß gehorcht, also nicht einer deterministischen Differenzgleichung wie es bei den GARCH Modellen der Fall ist. Seine allgemeine Form lautet:

3.2.3.1

$$y_{it} = \mu_i + \phi_1 y_{it-1} + \dots + \phi_p y_{it-p} + h_{it} \cdot \varepsilon_{it}$$

mit i aus $\{1 \dots N\}$ und $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T \sim N(0, \Sigma_\varepsilon)$ ⁹.

y_i, ϕ_i, h_i aus $\mathbb{R}_{(+,0)}$. Die Diagonaleinträge von Σ_ε sind 1.

Der Vektor der Volatilitäten h_t gehorcht im allgemeinsten Fall einem VARMA Prozeß wie er in 3.2.1 vorgestellt wurde.

3.2.3.2

$$h_t = \mu + \Phi_1 h_{t-1} + \dots + \Phi_q h_{t-q} + \eta_t + \Theta_1 \eta_{t-1} + \dots + \Theta_r \eta_{t-r}$$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix H_t sei definiert durch:

$$\begin{pmatrix} h_{1t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_{Nt} \end{pmatrix} * \Sigma_\varepsilon.$$

Abhängigkeiten zwischen den Elementen des Vektors h können über Nichtdiagonalelemente der Matrizen Φ und Θ sowie mittels der konstanten Varianz-Kovarianz-Matrix Σ_η modelliert werden. Zu beachten ist, daß hier nicht die ganze Varianz-Kovarianz-Matrix H_t variabel ist, sondern nur die Diagonaleinträge. Die Kovarianzen werden konstant durch die Nichtdiagonaleinträge der Matrix Σ_ε geschätzt. Außerdem entspricht der deterministische Teil von 3.2.3.1 dem in 3.2.1 angesprochenen Spezialfall, wenn Φ und Θ Diagonalmatrizen sind.

Zur weiteren Untersuchung solcher Modelle eignen sich <Harvey 1993> Kapitel 8.4. und <Harvey/Ruiz 1994>. Wichtige Stichwörter dafür sind: Die State Space Form von 3.2.3.1 und 3.2.3.2, welche notwendig ist um den Kalmanfilter anwenden zu können, der dann eine Quasi Maximum Likelihood Schätzung der (Varianz)-Parameter von 3.2.3.2 ermöglicht.

⁹ Das Modell kann auf nicht normalverteilte Vektoren ε verallgemeinert werden, siehe <Harvey/Ruiz 1994> S. 258.

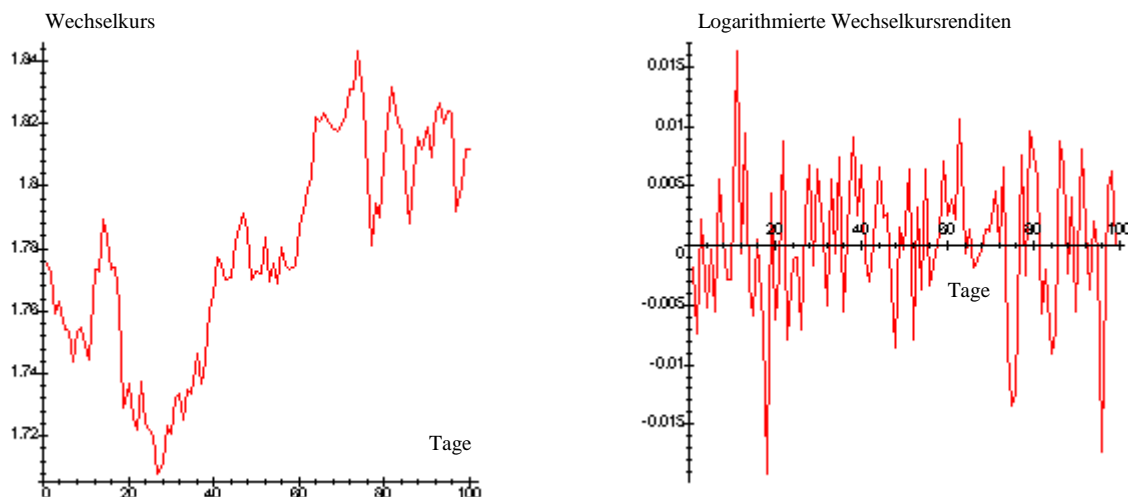
3.2.4 Modelle aus der Kapitalmarkttheorie

Dieses Unterkapitel erläutert, welche Größe der Prozeß $\{y_t\}$ beschreibt und zeigt einen anderen Weg um ein Modell der Form 3.3.1.6 zu erlangen. Modell 3.3.1.6 folgt als Spezialfall des, ohne ökonomischen Hintergrund definierten Modells 3.2.2. Hier werden wir eine kapitalmarkttheoretisch motivierte Herleitung vorstellen.

Dazu betrachten wir den Prozeß $\{x_t\}$ der z.B. Zinssätze, Aktien- oder Devisenkurse darstellen könnte, d.h. alle Stellparameter die in unseren OTC-Bewertungsformeln vorkommen. Empirische Beobachtungen zeigen, daß solche Kurse¹⁰ eher einer rechtsschiefen Verteilung mit positivem Definitionsbereich folgen (siehe 3.2.4.3). Dies erfüllt u.a. die Lognormalverteilung. Um eine symmetrische (Normal)-Verteilung zu erhalten, geht man von einer Lognormalverteilung der Kurse aus und betrachtet deshalb den logarithmierten Kurs $y_t = \ln(x_t)$ oder die logarithmierte Rendite $y_t = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1}) = \ln(x_t/x_{t-1})$.

Die unten abgebildeten DM/\$ Wechselkursverläufe veranschaulichen die Transformation. Links die nicht transformierte Zeitreihe (x_t) und rechts die transformierte Zeitreihe (y_t) mit $y_t = \ln(x_t/x_{t-1})$. Obwohl wir später unser Modell für transformierte Zeitreihen allgemeiner halten werden, zeigt sich hier schon, daß wir einen konstanten Erwartungswert von Null voraussetzen könnten.

3.2.4.1 Abb. Logarithmische Transformation



¹⁰ Das gilt nicht für die Kursverläufe der dadurch determinierten Finanzinstrumente wie Swaps und Optionen. Diese können alle Formen rechts-, linkschiefer Dichten annehmen. Auch Dichten mit mehreren lokalen Maxima sind möglich. Einige Skizzen solcher Dichten finden sich in <Holton 1996> S. 8,9.

Um die logarithmische Transformation besser zu verstehen und die Verbindung zum mathematisch hergeleiteten Modell 3.3.1.6 herzustellen, beschreibt dieser Abschnitt die dahinterstehende Kapitalmarkttheorie und die daraus abgeleiteten Formen der Random Walk Hypothese.

Die am heftigsten diskutierte Effizienzhypothese ist die eines **halbstrengen informationseffizienten Marktes**. Sie besagt, daß:

1) Alle Informationen über vergangene Kursentwicklungen in aktuellen Kursen enthalten sind. Die Technische Analyse¹¹ dürfte demnach keine, über der durchschnittlichen Marktrendite liegende Rendite erwirtschaften. Dieser erste Punkt wird auch als **schwache Kapitalmarkteffizienz** bezeichnet.

2) Alle öffentlich verfügbaren Informationen spiegeln sich sofort in den Kursen wieder.

Diese Annahmen implizieren **homogene Erwartungen** aller Anleger. D.h. öffentliche Informationen sind sofort und für alle Marktteilnehmer verfügbar. Homogene Erwartungen wiederum sind die Grundlage fundamentaler Kapitalmarktmodelle wie etwa das CAPM, APT und das Markowitzmodell¹².

Aus der Theorie effizienter Märkte wurde aber auch das Random Walk Modell abgeleitet¹³. Denn neue Informationen kommen zufällig, unvorhersehbar und werden sofort verarbeitet. Daraus leitete man einen Zufallsprozeß ab, der diese Anforderungen erfüllt. Die **Random Walk Hypothese**:

3.2.4.2 Random Walk Modell

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Hier ist ε_t eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert Null und zeitlich konstanter Varianz. Die Größe x_t repräsentiert den Wertpapierkurs zum Zeitpunkt t .

Eine Verallgemeinerung bietet das **Martingale Modell**, welches die Normalverteilungsannahme und die Annahme konstanter Varianz aufhebt. Allerdings unterstellt auch dieses Modell eine erwartete Rendite von Null.

¹¹ Siehe <Steiner 1996> S. 203ff

¹² Siehe <Steiner 1996> und <Copeland / Weston 1992>.

¹³ Eigentlich folgt das Random Walk Modell nicht aus der Effizienzhypothese, sondern umgekehrt, folgt aus der Gültigkeit eines Random Walk die halbstarke Effizienz eines Kapitalmarktes. Der Grund ist, daß der aus einem halbstreng effizienten Markt entstehende Zufallsprozeß keinen konstanten Erwartungswert und keine konstante Varianz haben muß. Nicht einmal die Art der Verteilung muß im Zeitablauf konstant bleiben.

Diese unrealistische Annahme behebt das **Submartingale Modell**:

3.2.4.3 Submartingale Modell

$$x_t = \mu + x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Die vorher angeführte Argumentation, daß Kurse eher einer rechtsschiefen Verteilung mit positivem Definitionsbereich folgen, bezieht sich auf die Verteilung von ε_t . Damit die Annahme eines symmetrisch (wenn möglich normal-) verteilten Störterms ε_t gerechtfertigt ist, betrachtet man $y_t = \ln(x_t)$ oder $y_t = \ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$ und erhält aus der ökonomischen Theorie folgendes Modell.

3.2.4.4 Submartingale logarithmierter Kurse

$$\ln(x_t) = \mu + \ln(x_{t-1}) + \varepsilon_t$$

$$\Leftrightarrow y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Wobei für ε_t jetzt eine symmetrische Verteilung vorausgesetzt wird. In dieser Form kann das Modell mit dem von uns verwendeten GARCH Modell 3.3.1.6 verglichen werden. Im wesentlichen spezifiziert das GARCH Modell die Art der nicht konstanten Varianz und die Verteilungsannahme von ε_t . Für die Verteilung von ε_t ist bei unserem GARCH Modell eine aus der standardisierten t-Verteilung folgende Dichte verantwortlich (vgl. 3.4.1).

3.3. Modellwahl und –vereinfachung

In diesem Unterkapitel gehen wir von den allgemein definierten Modellarten 3.2.1 bis 3.2.3 aus und vereinfachen das ausgewählte Modell. Dabei werden wir ein Modell erhalten (3.3.1.6), das als Vertreter der Modelle vom Typ 3.2.4.4 betrachtet werden kann.

Die Modellwahl muß beachten, welche Ziele mit dem gewählten Modell erreicht werden sollen. Dabei lassen sich zwei Extremfälle unterscheiden:

- 1) Es sollen wenige Stellparameter über einen möglichst langen Zeitraum simuliert werden und die Rechengeschwindigkeit spielt keine übergeordnete Rolle.
- 2) Viele Stellparameter sollen über einen relativ kurzen Zeitraum vorhergesagt werden, wobei die Rechengeschwindigkeit höchste Priorität hat, da solche Vorhersagen mehrmals am Tag nötig sein könnten.

In unserem Fall trifft, wegen der Größe der zu betrachtenden Portfolien und einem Zeithorizont von 1 bis 10 Tagen, bei mehr als täglicher Berechnung, der zweite Fall zu. Dies bedeutet, daß ein Kompromiß zwischen Modellgüte und Rechenaufwand gefunden werden muß.

Da wir die Heteroskedastizität (vgl. 3.2.1) berücksichtigen müssen, aber kein zu großer Aufwand (bei den laufenden Berechnungen) entstehen soll, wurde das GARCH-Modell gewählt. Es ist das derzeit populärste Modell und scheint, aufgrund empirischer Erfahrung Kursverläufe von Stellparametern, wie sie in unseren Portfolien vorkommen, gut zu modellieren. Eine ausführliche Beschreibung hierzu liefern Bollerslev, Chou und Kroner in <Bollerslev/Kroner 1992>.

3.3.1 Vereinfachung des allgemeinen GARCH-Modells

Ziel ist, daß mehrdimensionale Modell 3.2.2 in mehrere, getrennt voneinander betrachtbare, eindimensionale Modelle zu zerlegen. Darüber hinaus soll der Rechenaufwand von ursprünglich $(1/2) \cdot (N^2 + N)$ eindimensionalen Zeitreihen ($\text{vech}(H_t)$) auf N Zeitreihen reduziert werden.

Der *erste Schritt* beschränkt die möglichen Matrizen Θ_i und Ω_i (des Modells 3.2.2) auf die Menge der Diagonalmatrizen. Folgende Beziehung zwischen Korrelation ρ_{ij} und Kovarianz σ_{ij} liefert die angestrebte Aufwandsreduktion:

3.3.1.2

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

Wir werden nur die N Standardabweichungen σ_i durch den GARCH-Prozeß vorhersagen. Die entsprechenden Kovarianzen ergeben sich dann aus der historisch geschätzten Korrelation mittels 3.3.1.2. Dies bedeutet z.B., daß bei konstanter positiver Korrelation die Kovarianz ansteigt wenn beide Standardabweichungen ansteigen. Die Kovarianz ist also nicht konstant.

Ist $\hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \cdot \hat{\sigma}_j}$ der historische Schätzer für ρ dann gehorchen die von uns in der Varianz-

Kovarianz-Matrix verwendeten Kovarianzen der Gesetzmäßigkeit:

3.3.1.3

$$\bar{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij} \cdot \frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_i} \cdot \frac{\sigma_j}{\hat{\sigma}_j}$$

D.h. die historische Kovarianz wird mittels relativer Abweichungen der simulierten Volatilitäten von den historischen Schätzern an den Simulationsprozeß angepaßt. Ob diese Methode gegenüber einer reinen historischen Schätzung der Kovarianz Vorteile hat, kann nur im laufenden Einsatz des Modells durch Erfahrungswerte ermittelt werden. Der Ansatz 3.3.1.3 ist gegenüber einer reinen historischen Schätzung vorteilhaft, wenn wir von einer konstanten Korrelation ausgehen können oder Korrelation und Volatilitäten sich gleichlaufend verhalten, d.h. mit steigenden Volatilitäten eine steigende Korrelation beobachtbar ist und umgekehrt.

Bisherige Erfahrungen bestätigen empirisch den Ansatz 3.3.1.3 (siehe <Harvey/Ruiz 1994> Chapter 3).

Der *zweite Schritt* fordert die Diagonalität der Matrizen Φ_i (vgl. 3.2.2). Dies geschieht nicht um die Parameter Φ_i einfacher schätzen zu können, sondern es vereinfacht die richtige Wahl der Ordnung p des GARCH-Prozesses 3.2.2. Eigentlich sind dadurch N verschiedene Ordnungen p_i der Einzelprozesse $\{y_{i,t}\}$ entstanden, da wir nicht davon ausgehen, daß alle Einzelprozesse dieselbe Ordnung besitzen. D.h. wir ersetzen den N -dimensionalen Aufwand durch N 1-dimensionale Berechnungen. Die Parameterschätzung und das Bestimmen der Ordnung p verlaufen im Mehrdimensionalen analog zum eindimensionalen Fall, das Vorgehen bleibt im Prinzip gleich. Lütkepohl stellt in <Lütkepohl 1993> in den Kapiteln 4.2.2 und 4.2.3 ein mehrdimensionales Analogon der Partiiellen Autokorrelationsfunktion (=PACF) zur Bestimmung der Ordnung p vor, und behandelt im Kapitel 3.2. die Parameterbestimmung der Matrizen Φ_i bei gegebener Ordnung p .

Durch die beiden Vereinfachungen läßt sich 3.2.2 in folgender Form schreiben:

3.3.1.4

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{N,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11,1} * y_{1,t-1} \\ \vdots \\ \phi_{NN,1} * y_{N,t-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \phi_{11,p} * y_{1,t-p} \\ \vdots \\ \phi_{NN,p} * y_{N,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N,t} \end{pmatrix}$$

mit $(\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{N,t})^T = \varepsilon_t | Y_{t-1} \sim N(0, H_t)$ und den Matrizen

$$H_t = (h_{ij})_t, \Phi_k = (\phi_{ij})_k, \Omega_k = (\omega_{ij})_k, \Theta_k = (\theta_{ij})_k, \Gamma = (\gamma_{ij})$$

$$h_{ii,t} = \gamma_{ii} + \sum_{m=1}^q \theta_{mm} \varepsilon_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^r \omega_{nn} h_{ii,t-n}$$

$$h_{ij,t} = \hat{\rho}_{ij} * h_{ii,t} * h_{jj,t}$$

i, j aus $\{1, \dots, N\}$

Diese Darstellung erlaubt es im folgenden, stellvertretend für alle Einzelprozesse, den eindimensionalen Prozeß $\{y_t\}$ mit $\varepsilon_t \sim N(0, h_t)$ zu betrachten.

3.3.1.5 a)

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad \text{mit } \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$$

3.3.1.5 b)

$$h_t = \gamma + \sum_{m=1}^q \theta_m \varepsilon_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^r \omega_n h_{t-n}$$

In der Praxis wird oft $p=0$ und $q,r=1$ gesetzt, weil dies ausreichend gute Ergebnisse liefert und gleichzeitig den Aufwand reduziert. Anhaltspunkte dafür liefern <Bollerslev/Kroner 1992> in Chapter 2.2 und <Bollerslev 1987> in Chapter IV sowie <Harvey/Ruiz 1994> in Chapter 2. Auch J.P. Morgan verwendet dieses vereinfachte Modell (<RiskMetrics 1996> Chapter 4.6 und 5.2) mit der zusätzlichen Annahme, daß γ und μ gleich Null und $\theta+\omega=1$ gilt.

Wegen den oben genannten Gründen verwendet diese Diplomarbeit folgendes Modell, welches an die N Zeitreihen der Stellparameter anzupassen ist und die **standardisierte t-Verteilung**¹⁴, anstatt der gewohnten Normalverteilung, verwendet. Die t-Verteilung, $t(v)$, ist in der Lage leptokurtotisches Verhalten, d.h. extreme Kursverläufe zu modellieren und konvergiert für unendlich großes v gegen die Standardnormalverteilung.

3.3.1.6

$$y_t = \mu + \sqrt{h_t} * u_t$$

mit $u_t | Y_{t-1} \sim t(v)$ und $\gamma > 0$, $\theta, \omega \geq 0$, sowie $\theta + \omega < 1$ und $\varepsilon_t := \sqrt{h_t} * u_t$

$$h_t = \gamma + \theta * \varepsilon_{t-1}^2 + \omega * h_{t-1}$$

Bevor wir auf dieses Modell näher eingehen, wollen wir, trotz der eben angeführten Anhaltspunkte, einige Zeitreihen möglicher Stellparametern mit der Partiellen Autokorrelationsfunktion (=PACF) untersuchen. Diese ermittelt die Ordnung p des Prozesses 3.3.1.5 a). Die PACF wird oft in Verbindung mit der Autokorrelationsfunktion (=ACF) dazu benutzt, um die Art eines zugrundeliegenden ARMA(p,q) Prozesses festzulegen. Mit der ACF kann entschieden werden, ob es sich um einen reinen AR(p) oder MA(q) Prozeß handelt. Bei gemischten Prozessen müssen beide Funktionen, ACF und PACF, betrachtet werden.

Da aber für 3.3.1.5 a) modellbedingt schon ein AR(p) Prozeß (=ARMA($p,0$)) festliegt¹⁵, müßte die ACF dafür nicht betrachtet werden. Sie dient aber als Grundlage zur Berechnung der PACF. Darüberhinaus wollen wir die AR(p) Annahme des Modells 3.3.1.5 a) nochmals verifizieren. Insgesamt sollen die nachfolgenden Ausführungen die Anhaltspunkte der oben angeführten Fachliteratur bestätigen.

¹⁴ Alternativ kann auch die Generalised Error Distribution, GED(v), verwendet werden. Sie enthält die Standard Normalverteilung als Spezialfall ($v=2$) und wird für $v < 2$ leptokurtotisch (fat tailed) und high peaked. Für $v > 2$ tritt der umgekehrte Fall ein; thin tails and low peaked. Die Verteilung hat aber den Nachteil, in gängiger Software nicht implementiert zu sein. Weitere Informationen liefert <RiskMetrics 1996> Appendix B.2.3.

¹⁵ Eigentlich ist 3.3.1.5 a) wegen der nicht konstanten Varianz **kein AR-Prozeß**, aber dies berührt nicht die Gültigkeit der ACF und PACF.

3.3.2 Zeitreihenanalyse

Man berechnet analytisch die ACF und PACF der theoretischen Modelle und vergleicht deren Verlauf mit ihrem empirischen Gegenstück der zu untersuchenden Zeitreihe. Es soll nochmal betont werden, daß dieser Abschnitt, vereinfachend, von einer konstanten Varianz, d.h. einem AR(p) Prozeß ausgeht. Diese Annahme berührt nicht die empirische ACF und -PACF. Für deren theoretische Gegenstücke, die Modelltypen charakterisieren, gilt, daß sich ARMA- und GARCH-Modelle diesbezüglich ähnlich verhalten.

Die **theoretische ACF**, $\rho(y_t, y_{t+k})$, eines AR(p) Prozesses $\{y_t\}$ erfüllt folgende Eigenschaften:

Sie fällt in exponentieller Form streng monoton ab oder verhält sich wie eine gedämpfte Sinusschwingung. Sie kann auch beide Eigenschaften gleichzeitig aufweisen.

Für die **theoretische PACF** eines AR(p) Prozesses $\{y_t\}$ gilt:

3.3.2.1

$$\rho_{pp}(k) = \text{Cov}(y_t, y_{t+k} \mid y_{t+1}, \dots, y_{t+k-1}) = \begin{cases} \phi_p & \text{für } k = p \\ \neq 0 & \text{für } k < p \\ 0 & \text{für } k > p \end{cases}$$

Es werden jetzt die empirische ACF und PACF eingeführt um deren Verlauf mit den theoretischen Vorgaben zu vergleichen.

3.3.2.2 Definition (Empirische: Autokovarianz, Autokorrelation und Partielle Autokorrelation)

Ist y^* der empirische Mittelwert der Zeitreihe $(y_t) = (y_1, \dots, y_n)$ dann gilt:

a) Die **empirische Autokovarianzfunktion** zum lag k , $c(k)$, ist definiert durch:

$$c(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} (y_t - y^*)(y_{t+|k|} - y^*) = c(-k) \quad k \in \{-n, \dots, n\}$$

Sie ist ein Schätzer der theoretischen (Auto)-Kovarianz $\text{Cov}(y_t, y_{t+k})$. Der Nenner n (statt $n-|k|$) stellt sicher, daß die nachfolgend definierte Matrix R nichtnegativ definit ist.

- b) Die **empirische Autokorrelationsfunktion** zum lag k , $r(k)$, ist definiert durch:

$$r(k) = c(k)/c(0)$$

Sie ist ein Schätzer der theoretischen (Auto)-Korrelation $\rho(y_t, y_{t+k})$.

- c) Die **empirische Partielle Autokorrelationsfunktion** zum lag k , $pr(k)$, entsteht aus b), wenn die dazwischen liegenden Werte als gegeben betrachtet werden. Sie ist ein Schätzer für $\rho(y_t, y_{t+k} | y_{t+1}, \dots, y_{t+k-1})$.

$$pr(k) = \left(R_k^{-1} * (c(1), \dots, c(k))^T \right)_k$$

Der abschließende Index k extrahiert die k te Komponente des Vektors.

Für die symmetrische Matrix R_k gilt:

$$R_k = \begin{pmatrix} c(0) & c(1) & \dots & c(k-1) \\ & \ddots & c(1) & c(k-2) \\ & & \ddots & \vdots \\ c(1-k) & & & c(0) \end{pmatrix} = (c(j-i))_{i,j=1}^k$$

Für die Entscheidung, ob die Parameter ϕ_k vernachlässigbar klein sind, benötigen wir ein symmetrisches Konfidenzintervall um Null. Dabei nutzen wir die Tatsache, daß für einen AR(p) Prozeß die Werte von $pr(k)$, für $k > p$, näherungsweise $N(0, 1/n)$ verteilt sind (n ist die Anzahl der Stichprobenelemente). Darum enthalten nachfolgende Diagramme das zentrale 97.5% Konfidenzintervall $[-2.24/\sqrt{n}, 2.24/\sqrt{n}]$. Dieses zeigt an, falls alle Werte der PACF zum lag k in diesem Intervall liegen, daß die von uns aufgestellte Nullhypothese, verschwindender Koeffizienten ϕ_i , mit einer Konfidenz von 97.5% nicht verworfen werden kann.

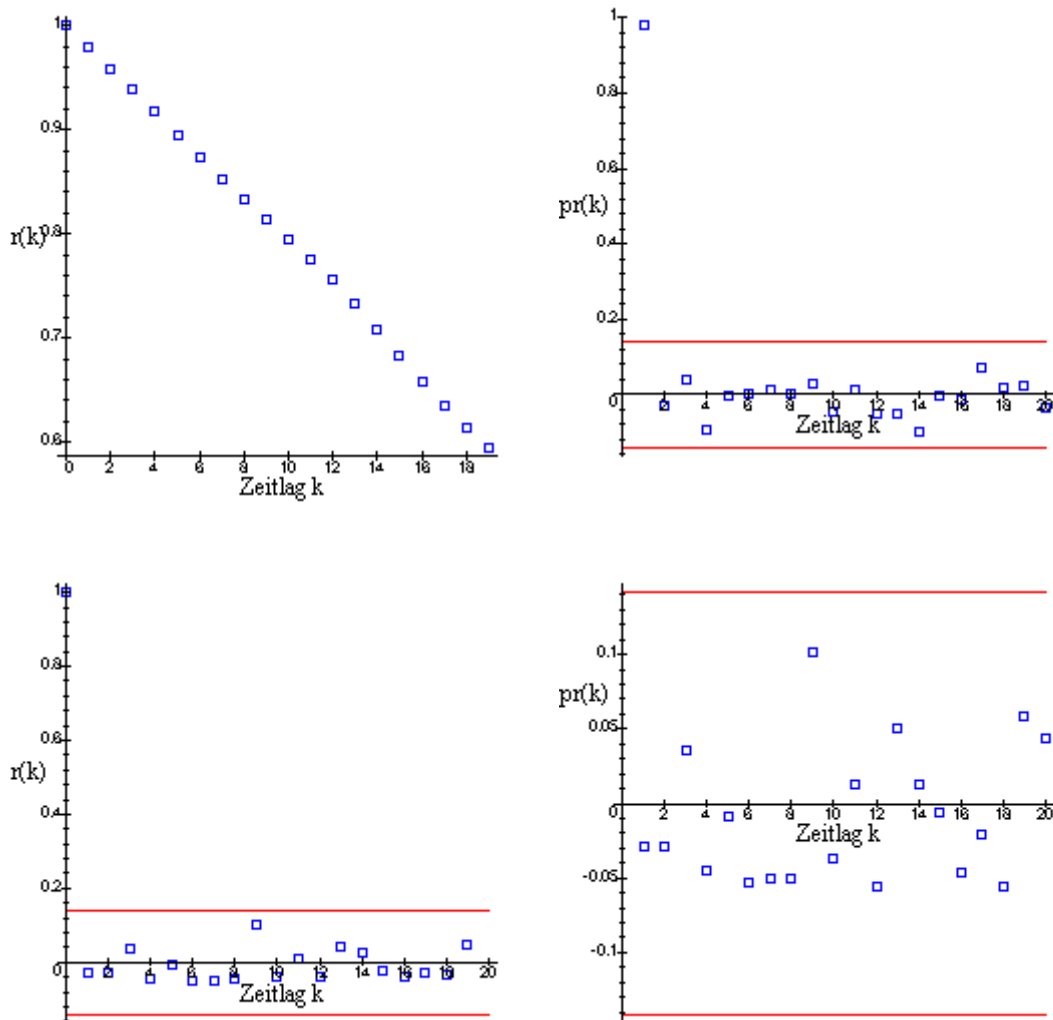
Das gleiche Konfidenzintervall kann auch zur Überprüfung der zeitlichen Abhängigkeit verwendet werden. Ist die zugrunde liegende Zufallsvariable unabhängig und identisch verteilt, dann gehorchen auch die Werte von $r(k)$ näherungsweise einer $N(0, 1/n)$ Verteilung.

Die ersten beiden Abbildungen der ACF und PACF, für die Zeitreihe (x_t) , veranschaulichen beim Vergleich die Wirkung der logarithmischen Transformation.

3.3.2.3 Diagramme^{16, 17}

Es werden jeweils (von links nach rechts) die ACF und PACF für die untransformierte Stellparameterzeitreihe (x_t) und die ACF und PACF für $y_t = \ln(x_t/x_{t-1})$ dargestellt.

3.3.2.3.1 Abb. Tägliche Kurse der Microsoftaktie vom 13.5.1997 bis zum 11.5.1998.

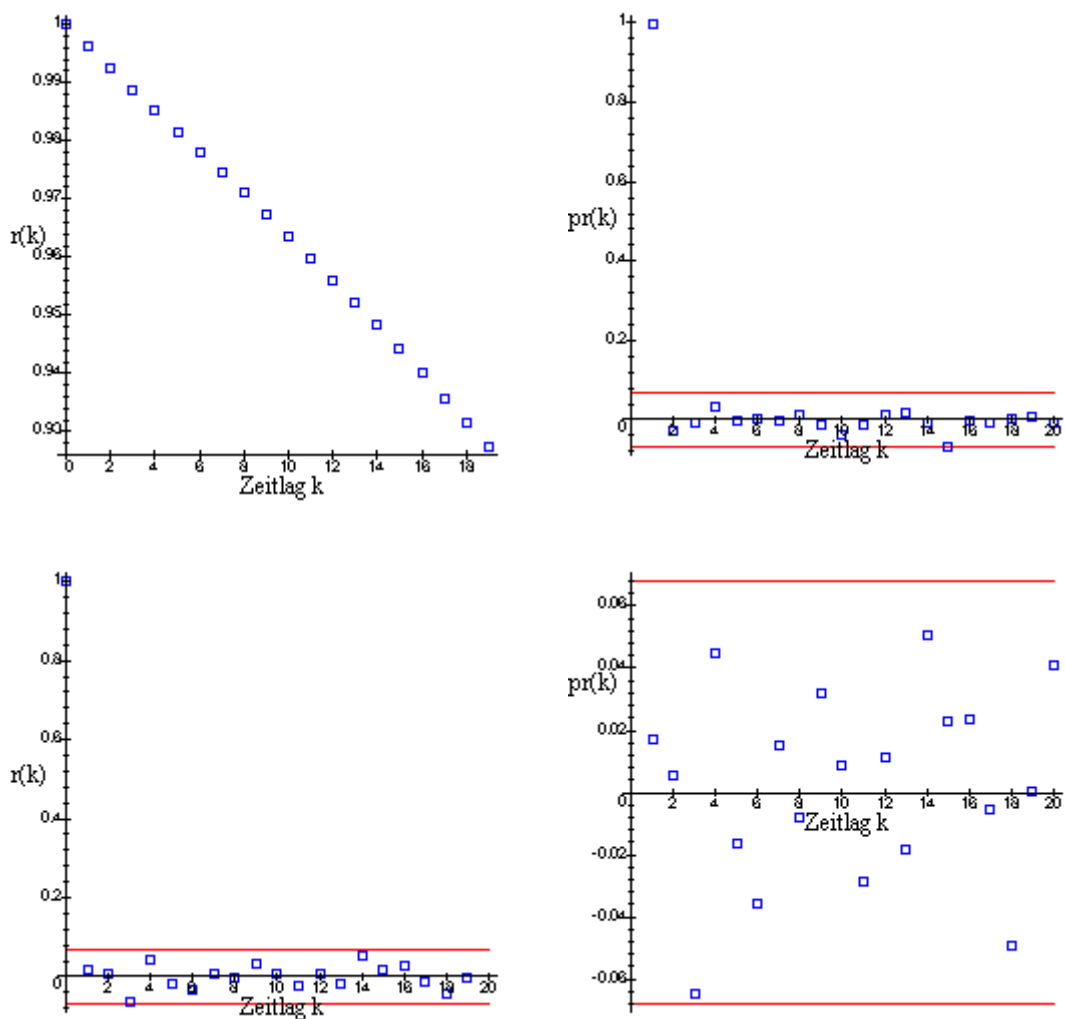


¹⁶ Das dafür erstellte Maple Programm befindet sich im Anhang 5.3.1.

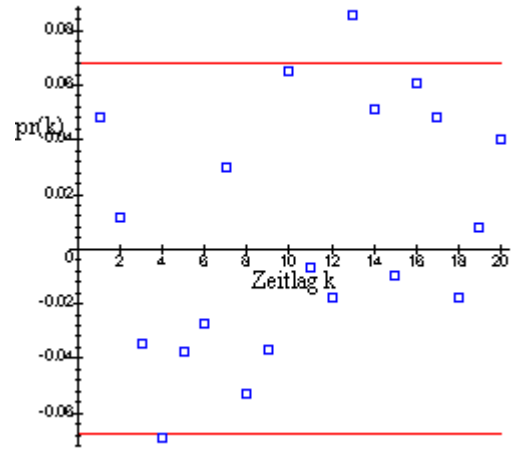
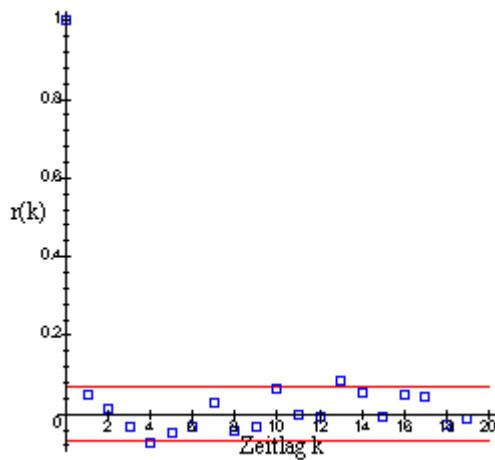
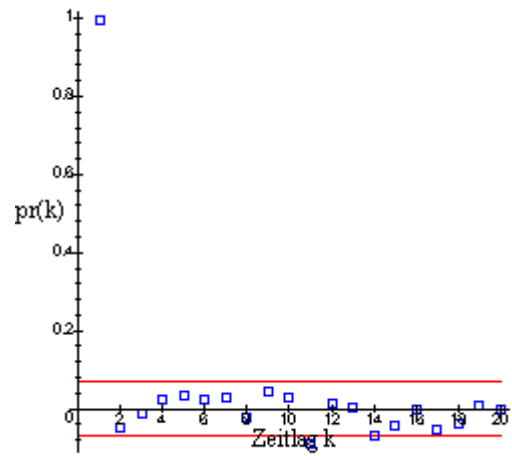
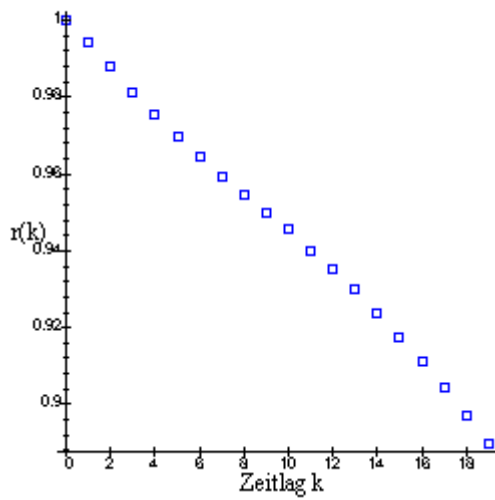
¹⁷ Die benutzten Zeitreihen stammen von: (3.3.2.3.1) NASDAQ (=National Association of Securities Dealers Automated Quoting System) <http://www.nasdaq.com>; (3.3.2.3.2) und (3.3.2.3.3) Federal Reserve Bank <http://www.bog.frb.fed.us/releases/>. Für die kostenlosen Daten möchte ich den angegebenen Institutionen meinen Dank aussprechen. Eine weitere interessante Datenquelle bietet die NYSE (New York Stock Exchange) z.B. NYSE Composite Index unter <http://www.nyse.com/public/market/2c/2cix.htm>.

Die ersten beiden Abbildungen deuten auf einen AR(1) Prozeß mit positivem Koeffizienten ϕ hin. Die logarithmische Transformation $\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$ ermöglicht, gemäß der zweiten zwei Abbildungen, ein Modell der Form 3.3.1.5 a) mit $p=0$. Alle folgenden Zeitreihen zeigen die gleichen Eigenschaften. Dadurch werden die obigen Literaturangaben bestätigt.

3.3.2.3.2 Abb. Tägliche Wechselkurse (DM/\$) vom 03.01.1994 bis zum 01.05.1998.

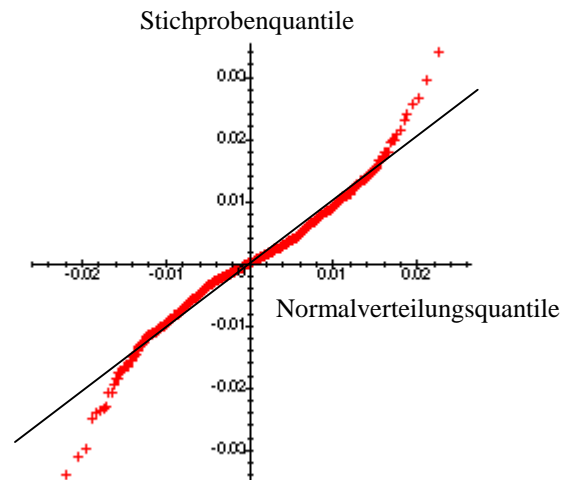


3.3.2.3.3 Abb. Tägliche Zinssätze 10-jähriger Treasury Bonds vom 03.01.1994 bis 08.05.1998.



Die Zeitreihenanalyse abschließend wird jetzt noch ein Q-Q-Plot und die Stichprobendichte zur Überprüfung der Normalverteilungsannahme (bei konstanter Varianz) abgebildet.

3.3.2.3.4 Abb. Q-Q-Plot für die Zeitreihe des NYSE Composite Index

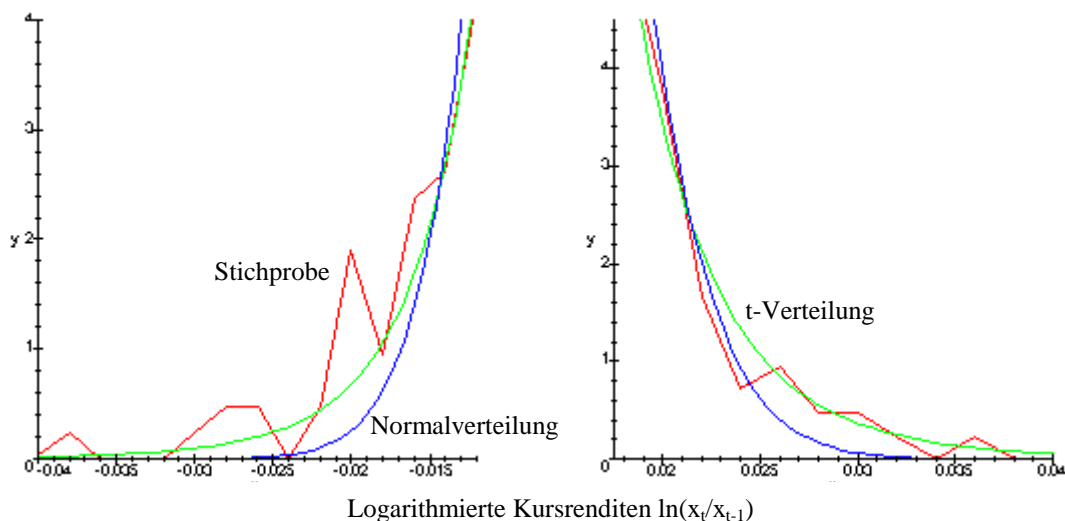
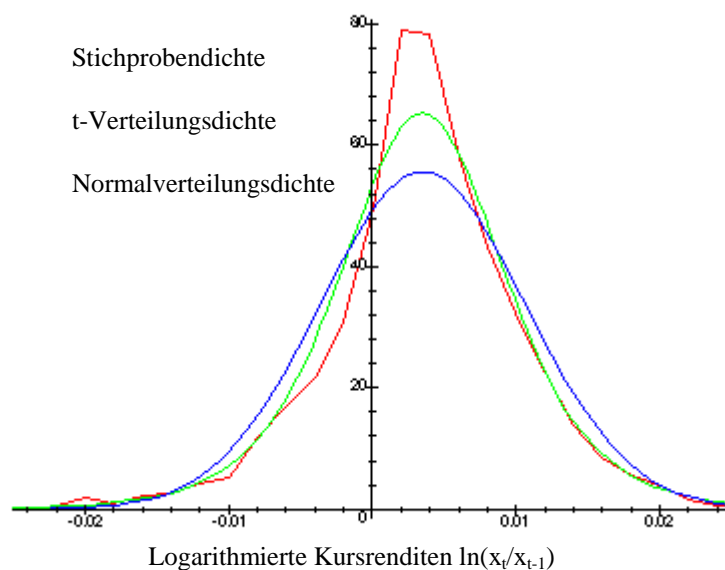


Der Verlauf der Kurve im Vergleich zur Ursprungsgeraden zeigt ein häufigeres Auftreten von vom Ursprung weit entfernten Werten, als dies bei einer Normalverteilung der Fall wäre. Außerdem deuten die drei Kurvenschnittpunkte mit der Ursprungsgeraden darauf hin, daß auch Werte nahe des Nullpunktes häufiger auftreten, wohingegen dazwischen liegende Werte der Zufallsvariablen in der Stichprobe seltener feststellbar waren. Insgesamt scheint die der Stichprobe zugrunde liegende Verteilung leptokurtotisch (“fat tailed”) und “high peaked” zu sein.

Das folgende Histogramm (die aus der Stichprobe geschätzte Dichte) bestätigt, im Vergleich mit der dazugehörigen Normalverteilungsdichte, diese Aussage und zeigt gleichzeitig die bessere Anpassung der t-Verteilung.

3.3.2.3.5 Abb. Vergleich von Dichten

Zum Vergleich wurden die Dichten von $N(0.0035, 0.007181^2)$ und der standardisierten t-Verteilung $t(0.0035, 0.007181^2, 6)$ sowie die Stichprobendichte gezeichnet. Die Parameter der theoretischen Dichten wurden aus der Stichprobe des NSYE Composite Index geschätzt. Die Kursdaten reichten von 1990 bis Anfang 1998.



Die letzten beiden Abbildungen veranschaulichen die “fat tails” der Stichprobendichte und die wesentlich bessere Modellierung mittels der t-Verteilung. Zu beachten ist, daß die t-Verteilung im Falle der VaR Berechnung vor allem die äußeren Bereiche der wirklichen Verteilung, also nicht den Bereich um das Maximum gut annähern soll. Die verwendete t-Verteilung entspricht der Dichte von 3.4.1.2.

3.4. Schätzen der Modellparameter

Der AR(p) Prozeß von 3.3.1.5. a) kann auch so interpretiert werden, daß er dazu dient, das Modell soweit anzupassen, damit eine Normalverteilung, $N(0, \sigma_t^2)$, die verbleibenden Residuen ausreichend modelliert. Im hier verwendeten Modell 3.3.1.6 erlauben wir statt einer Normalverteilung die allgemeinere t-Verteilung zur Beschreibung der Residuen. Dies ist aufgrund der Ergebnisse der Zeitreihenanalyse sinnvoll.

3.4.1 Modelldiskussion

Im Modell 3.3.1.6 entspricht $u_t|Y_{t-1}$ der **standardisierten t-Verteilung** mit der **Dichte**¹⁸:

3.4.1.1 t-Verteilung

$$f_v(u_t) = \frac{1}{\sqrt{v-2}} * \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) * \sqrt{\pi}} * \left(1 + \frac{u_t^2}{v-2}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

$\Gamma(x)$ bezeichnet die Gammafunktion und v ist aus den natürlichen Zahlen.

Ab $v \geq 3$ existieren Erwartungswert (schon ab $v \geq 2$) und Varianz. Außerdem konvergiert die t-Verteilung für $v \rightarrow \infty$ gegen die Standardnormalverteilung und approximiert diese besser als die herkömmliche t*-Verteilung.

Da wir den Erwartungswert und hauptsächlich die Varianz dynamisch Modellieren benötigen wir die entsprechende Dichte der t-Verteilung für $y_t = \mu + \sqrt{h_t} * u_t$:

3.4.1.2 Dichte von $t(\mu, h_t, v)$

$$g(y_t) = \frac{1}{\sqrt{h_t}} * f_v\left(\frac{y_t - \mu}{\sqrt{h_t}}\right)$$

¹⁸ Die Dichte unterscheidet sich von der gängigen t-Verteilung $t^*(n)$. In der hier dargestellten Form hat die t-Verteilung die konstante Varianz 1. Ist $X \sim t^*(n)$ mit Varianz $n/(n-2)$, dann betrachten wir die transformierte Zufallsvariable $Y \sim X * ((n-2)/n)^{1/2}$. Die **Herleitung** mit **Motivation** findet sich im **Anhang 5.3.2**.

Mit dieser Dichte kann der Anwender eine Maximum Likelihood Schätzung (=MLE) oder die Momentenmethode durchführen¹⁹. Dafür (Momentenmethode) gibt es statistische Software wie z.B. das Paket SAS/ETS²⁰, welches auch GARCH(q,r) Modelle abdeckt.

Leider steht entsprechende Software für die Diplomarbeit nicht zur Verfügung. Wir behelfen uns daher mit einer in Maple programmierten MLE die den, schon in Kapitel 2 benutzten SLP-Algorithmus (leicht modifiziert), benutzt.

Bevor wir darauf näher eingehen, wird hier die Varianzgleichung von 3.3.1.6 besprochen.

Die zusätzliche Voraussetzung $\theta + \omega = 1$, würde eine nicht endliche (unbedingte) Varianz implizieren. Damit wäre der Prozeß nicht schwach stationär aber strikt stationär. Erlauben wir, wie J.P. Morgan es in RiskMetrics tut, daß darüberhinaus $\gamma = 0$ gilt, so vereinfachen wir zwar zusätzlich die Parameterbestimmung, die Varianz h_t konvergiert dann aber fast sicher gegen Null. Deshalb sollte, wenn es der Rechenaufwand erlaubt, $\gamma > 0$ gefordert werden.

Die Begründung²¹ dafür liefert der Erwartungswert der Varianzgleichung von 3.3.1.6: $E(h_t) = \gamma * (1 - \theta - \omega)^{-1}$. Die Gleichung folgt aus 3.3.1.6 wegen $E(h_t) = E(h_{t-1}) = E(\epsilon_{t-1}^2)$.

Trotz dieses theoretischen Ergebnisses deuten einige Parameterschätzungen für γ auf Größenverhältnisse im Bereich 10^{-3} und kleiner hin²². Auch die Bedingung $\theta + \omega = 1$ wird von Bollerslev, in <Bollerslev 1987> (S.545), zumindest für die dort untersuchten Zeitreihen (Wechsel- und Indexkurse), als eine mögliche Vereinfachung angeführt.

Definieren wir $\lambda := \theta$ dann erlaubt uns die Restriktion $\theta + \omega = 1$, das Modell 3.3.1.6 in folgender Form zu schreiben:

3.4.1.3 IGARCH Modell (**I**ntegrated **G**ARCH)

$$y_t = \mu + \epsilon_t$$

mit $\epsilon_t | Y_{t-1} \sim t(0, h_t, \nu)$ und $\gamma \geq 0, \lambda > 0$ sowie $\epsilon_t = \sqrt{h_t} * u_t$

$$h_t = \gamma + \lambda * \epsilon_{t-1}^2 + (1 - \lambda) * h_{t-1}$$

Dieses Modell enthält dann das EWMA (Exponentially Weighted Moving Average Model) von J.P Morgan als Spezialfall.

¹⁹ Die rekursive Varianzgleichung von h_t läßt sich im Modell 3.3.1.6 in explizite Summenform überführen.

²⁰ Website <http://www.sas.com/> oder Tel. 06221/415123 (Deutscher Zweig).

²¹ Die hier angeführte einfache Begründung deckt nicht den Fall: $\gamma = 0$ und gleichzeitig $\theta + \omega = 1$, ab. Für diesen Fall soll auf <Harvey/Ruiz 1994> Chapter 2 verwiesen werden.

²² Siehe <Bollerslev 1987> S.545.

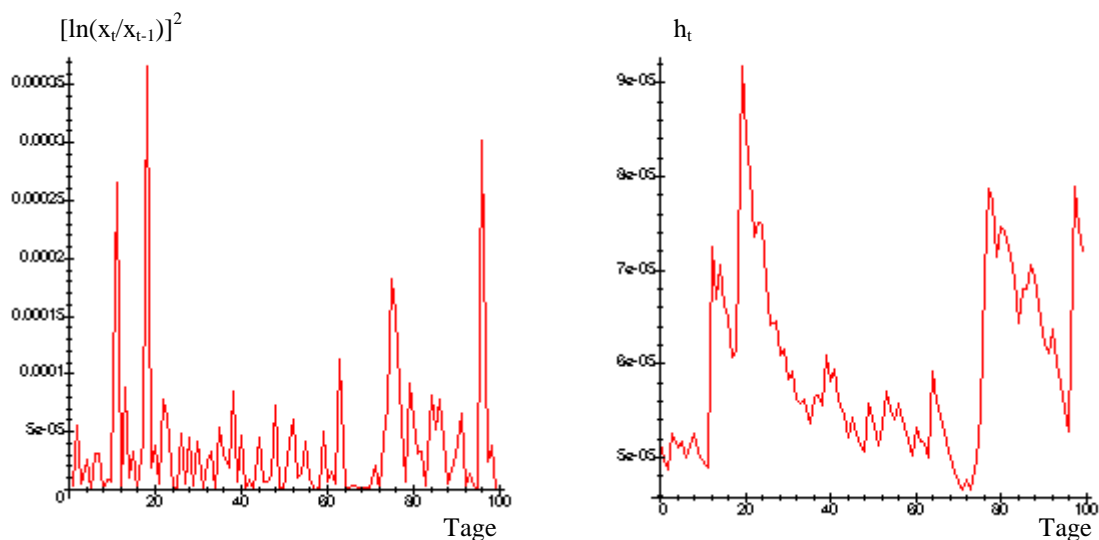
RiskMetrics erlangt dieses Modell nicht Top Down wie in dieser Arbeit sondern Bottom Up. D.h. RiskMetrics geht von einer exponentiell gewichteten, historischen Varianz aus und überführt diese in den Spezialfall des rekursiven Modells 3.4.1.3 (mit $\gamma=0$).

Der Varianzprozeß des GARCH Modells versucht die historisch aufgetretenen Varianzbewegungen zu modellieren und für die Zukunft vorherzubestimmen. Das Modell müßte also, nach erfolgter Parameterbestimmung, zumindest die vorgegebenen historischen Varianzbewegungen gut wiedergeben.

Folgende Abbildungen beschreiben den Kursverlauf des Quadrats logarithmierter Renditen der DM/\$ Wechselkurse (vgl. Abb 3.2.4.1) für 100 Tage und den Verlauf der Varianz bezüglich der t-Verteilung $t(0, h_t, 5)$, auch für 100 Tage. Da der Varianzprozeß mit der Stichprobe der ersten 20 Tage geschätzt wurde, verdeutlicht die restliche Varianzkurve die Modellgüte des GARCH Varianzprozesses bei gegebenen Residuen ε_t . Dies hat noch nicht viel mit Vorhersagequalität zu tun, da die im Modell enthaltenen ε_t historisch gegeben waren und nicht simuliert wurden.

Die MLE des Varianzprozesses ergab $h_t = 0,76 \cdot 10^{-5} + 0,093 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + 0,818 \cdot h_{t-1}$. Die historische Varianz betrug $h_0 = 5,16 \cdot 10^{-5}$. Die Kurven zeigen sehr gut, wie der Varianzprozeß schnell nach oben ausschlägt, wenn die Wechselkursrenditen höhere Schwankungen aufweisen. Es fällt aber auch auf, daß die Varianzkurve bei niedriger werdenden Renditeschwankungen nur langsam abfällt.

3.4.1.2 Abb. Varianzprozeß



3.4.2 Parameteralgorithmus

Wir schätzen die Parameter gemäß Modell 3.3.1.6 mit einer leicht modifizierten Form des SLP-Algorithmus, der schon in Kapitel 2 zur Optimierung des Gesamtportfolios benutzt wurde. Deshalb wird das dazugehörige Mapleprogramm nicht beigelegt.

- 1) Man kann eine zusätzliche MLE durchführen für $[(y_t - y^*)/\sqrt{h^*}] = u_t \sim t(0, 1, \nu)$. Dabei sind y^* und h^* der empirische Mittelwert bzw. die empirische Varianz der Zeitreihe (y_1, \dots, y_n) . Es wird also nur der Parameter ν über MLE geschätzt. Diesen **Schätzer** nennen wir ν . Alternativ kann man ν auch mit der empirischen Kurtosis (entsteht aus dem vierten zentralen Moment) anpassen.
- 2) Danach werden die Varianzparameter (γ, θ, ω) von h_t (siehe 3.3.1.6) durch MLE der Dichte 3.4.1.2 ermittelt. Man könnte auch unter der Annahme, y_t wäre $t(y^*, h_t, \nu \rightarrow \infty)$ verteilt, d.h. normalverteilt gemäß $N(y^*, h_t)$ eine QMLE²³ anwenden. Dies ist möglich, weil die standardisierte t-Verteilung die Standardnormalverteilung gut approximiert.
- 3) Mit den geschätzten Varianzparametern wird h_t und damit $y_t \sim t(y^*, h_t, \nu)$ simuliert.

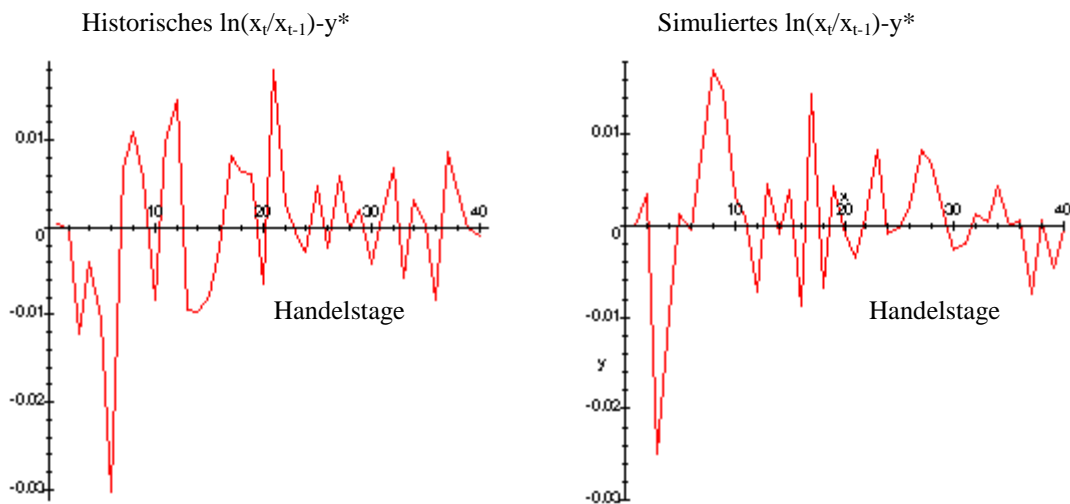
Für das Mapleprogramm wurde die rekursive Varianzgleichung in eine explizite Summenformel überführt. Diese wurde dann nach den Parametern $z = (\gamma, \theta, \omega)$ differenziert um die Hauptkomponente, $\frac{\partial h(t, z)}{\partial z}$, des Gradienten der logarithmierten Likelihoodfunktion zu erhalten²⁴.

Eine gut simulierte Zeitreihe sollte so aussehen, daß sie von einem möglichen realen Kursverlauf nicht zu unterscheiden ist. Nachfolgend wurde vom NYSE Composite Index x_t , $\ln(x_t/x_{t-1})$ für den Zeitraum vom 02.01.98 bis 02.03.98 (40 Handelstage), mittelwertbereinigt gezeichnet. Zum Vergleich wurde die simulierte Zeitreihe, deren Varianzparameter aus der mittelwertbereinigten Zeitreihe geschätzt wurden, abgebildet.

²³ Eine Abhandlung zur MLE von GARCH(q,r) Prozessen, die auf Scoring basiert, bietet <Greene 1993>. Er führt im Preface eine Auswahl geeigneter Statistik Software an.

²⁴ Die Summenformel und ein Beweis mittels vollständiger Induktion finden sich im Anhang 5.3.3.

3.4.2.1 Abb. Zeitreihenvergleich



Die linke Zeichnung zeigt den logarithmierten, historischen Kursverlauf, bereinigt um den empirischen Mittelwert y^* . Die rechte Zeichnung zeigt eine Zeitreihe, welche mit $h_t = 0,865 \cdot 10^{-5} + 0,078 \cdot \varepsilon_{t-1}^2 + 0,7813 \cdot h_{t-1}$ gemäß der Verteilung $t(0, h_t, 7)$ für 40 Handelstage im voraus²⁵ simuliert wurde. Die empirische Kurtosis der historischen Zeitreihe war 5,31 und für $v=7$ liefert die transformierte t-Verteilung, $t(0, h_t, 7)$, eine Kurtosis von 5,0. Die Parameter des Varianzprozesses wurden mit dem SLP-Algorithmus, angewandt auf die logarithmierte Likelihoodfunktion, ermittelt.

Bei den abgebildeten Zeitreihen sind sowohl die Höhe der Ausschläge als auch die „Frequenz der Schwingungen“ vergleichbar.

²⁵ Für die Simulation wurden nicht die historischen Werte der ε_t verwendet sondern die jeweiligen Realisationen des Zufallsgenerators von $t(0, h_t, 7)$. Es handelt sich also um ein mögliches „Kurszenario“.

3.5 Simulation

Das folgende erläutert die grobe Vorgehensweise einer Simulation:

- 1) Ermittlung der relevanten Bewertungsformeln aller im Portfolio enthaltenen Produkte (z.B. die Black & Scholes Formel bei Optionen). Diese Bewertungsformeln enthalten die verantwortlichen Stellparameter (=Risikofaktoren), welche simuliert werden sollen. Zusammenfassen der Teilformeln zu einer, das ganze Portfolio beschreibenden Gesamtformel, die alle unterschiedlichen Stellparameter als Variablen beinhaltet.
- 2) Auswahl eines mehrdimensionalen Vektormodells zur Beschreibung der wertbestimmenden Risikofaktoren und festlegen eines wiederum mehrdimensionalen Modells zur Abbildung der stochastischen Varianz-Kovarianz-Matrix der verbleibenden Residuen die nicht durch den deterministischen Teil erklärt werden können²⁶. Alternativ kann diese auch aus historischen Daten (z.B. exponentiell gewichtet, um jüngere Varianzbewegungen verstärkt zu berücksichtigen) geschätzt werden²⁷.
- 3) **Schätzung der Modellparameter**²⁸ beider Modelle sowie Auswahl der für die Zufallsbewegungen (=Residuen) verantwortlichen mehrdimensionalen Verteilung. Diese sollte in der Lage sein auch extreme Kursbewegungen zu modellieren.
- 4) Generierung möglichst vieler Realisationen des Stellparametervektors mit Hilfe der unter 3) gefundenen Verteilung.
- 5) Berechnung der entsprechenden Portfoliowerte über die gemeinsame Bewertungsformel, danach deren aufsteigendes Anordnen; und Bestimmen des VaR-Quantils.

²⁶ Das rekursive Modell ohne Zufallskomponente ist deterministisch und wird zuerst an die historischen Daten mittels "Regression" (Zeitreihenanalyse) angepaßt. Die verbleibenden (durch Regression minimierten) Residuen werden dann durch den Zufallsprozeß beschrieben. In Modell 3.3.1.6 spielt μ die Rolle des deterministischen Teils.

²⁷ Siehe <RiskMetrics 1996> Ch. 5.

²⁸ Hier ist zu **beachten**, daß die vorhandenen Kurswerte in Abständen von T Tagen vorliegen. Die Modellparameter und der berechnete VaR(P , α , T) (vgl. Def. 3.1.1) hängen also von dem gewählten Zeithorizont T ab. Will man mehrere, etwa **k Perioden der Länge T hintereinander simulieren**, müssen die N eindimensionalen Verteilungen **analytisch korreliert werden**. Dies ist aber bisher **nur für die Normalverteilung möglich**. So das in diesem Fall auf die Normalverteilung als Approximation der t-Verteilung zurückgegriffen werden muß.

6) Berechnung von **partiellen Sensitivitäten**²⁹, d.h. Änderungen des Portfoliowertes in Abhängigkeit eines gewählten Risikofaktors der Gesamtbewertungsformel. Diese partiellen Sensitivitäten berücksichtigen die Korrelation der Risikofaktoren untereinander und zeigen gleichzeitig die Bedeutung des im Einzelfall betrachteten Risikofaktors für die Wertänderung des Nettoexposures bzw. des Portfoliowertes. Die Ergebnisse der Simulation erläutern diese Aussage (siehe 3.5.3.2 und 3.5.3.3).

Obige Aufzählung spricht allgemein vom Portfoliowert. Im Fall des Collateralised Trading ist dies die Summe von modellbedingten OTC- und Bondmarktwerten. Bei der, im Abschnitt 3.5.2 durchgeführten, Simulation gleicht diese Summe unserem Nettoexposure.

3.5.1 Die verwendete Software

Für die Erzeugung der t-verteilten Zufallsvariablen benutzen wir das Programm @Risk32 der Firma Palisade³⁰. Dieses erzeugt die Abhängigkeiten der einzelnen Zeitreihen (Korrelationen) mittels **Rang Korrelationen**³¹. Damit können auch verschiedene Verteilungstypen (Zufallsvariablen) untereinander korreliert werden. Das Intervall (0,1] der erzeugenden Zufallsvariablen unterteilt @Risk32 in Teilintervalle, von denen jedes nur eine Realisation der erzeugenden Zufallsvariablen enthält. Soll das Programm n Realisationen simulieren, so unterteilt es das Intervall (0,1] in n äquidistante Teilintervalle. Aus jedem dieser Teilintervalle wird genau eine einelementige Stichprobe gezogen. Dieses Verfahren nennt man Monte Carlo Simulation mittels „**Stratified Sampling**“, es liefert eine bessere Konvergenz gegen die gesuchte Portfolioverteilung als die herkömmliche Monte Carlo Simulation, die direkt auf dem Intervall (0,1] arbeitet.

Hier wurden nur die einfachsten Fälle erläutert. Für multivariate Probleme verweise ich auf <Kendall 1970> (Rangkorrelationen).

²⁹ Wir betrachten einen gewählten Risikofaktor und ordnen die erhaltenen Portfoliowerte bezüglich der Werte, die dieser Faktor während der Simulation angenommen hat. Dadurch erhalten wir die Sensitivität des Portfolios bezüglich dieses Risikofaktors.

³⁰ Weitere Informationen finden sich unter <http://www.palisade.com>.

³¹ Eine gute und leicht verständliche Einführung bietet <Kendall 1970> auf den Seiten 1-11. Das Buch geht im weiteren sehr detailliert auf die Problematik der Ermittlung von Rangkorrelationen ein. Vereinfacht ausgedrückt, werden zwei gegebene Listen von Realisationen so sortiert, daß sich die gewünschte Rangkorrelation ergibt.

Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, daß @Risk32 als Input die Korrelationsmatrix und nicht die Varianz-Kovarianz-Matrix benutzt. Denn in unserem Modell gingen wir von konstanten Korrelationen aber variablen Kovarianzen aus (siehe 3.3.1.3). Dadurch werden die Abhängigkeiten der Zeitreihen untereinander während des Simulationsprozesses nicht verändert. Falls dies erwünscht ist muß der Betreffende entweder auf die Normalverteilungsannahme zurückgreifen oder auch die Kovarianzen mit einem GARCH Prozeß darstellen.

Modelliert man jedoch auch die Kovarianzen dynamisch, dann geht die Aufwandsreduktion (vgl. 3.3.1) verloren.

Der Grund dafür sind die, zur Modellierung notwendigen, $(1/2)*(N^2-N)$ zusätzlichen Kovarianzprozesse der Form:

$$h_{ij,t} = \gamma_{ij} + \theta_{ij} * \varepsilon_{i,t-1} * \varepsilon_{j,t-1} + \omega_{ij} * h_{ij,t-1}$$

Die von @Risk32 geforderte Korrelationsmatrix $P_{ij}=(\rho_{ij})$ ergibt sich dann dynamisch aus:

$$\rho_{ij} = h_{ij} / (\sqrt{h_i} * \sqrt{h_j})$$

Nachdem auf die Eigenschaften der verwendeten Software eingegangen und die theoretischen Grundlagen geschaffen wurden, folgt jetzt die eigentliche Simulation.

Das Portfolio besteht aus einer OTC-Option auf den NYSE Composite Index und einem Bondtyp zur Besicherung des OTC-Produktes.

Im Verlauf des Beispiels wird die Bewertung einer Option beim Collateralised Trading aus der Sicht des Käufers klar werden. Auf die effiziente Wahl des Stichprobenumfangs der für die Simulation notwendigen Stellparameterzeitreihen geht diese Diplomarbeit nicht ein³². Dies wäre aber eine weitere interessante Problemstellung.

³² Eine einfache statistische Größe für das von J.P. Morgan verwendete EWMA Modell, behandelt <RiskMetrics 1996> in Kapitel 5.3.1.2

3.5.2 Beispielsimulation

Die Simulation schätzt alle Größen aus einer Stichprobe der relevanten Stellparameter, die den Zeitraum vom 02.01.98 bis zum 02.03.98 (40 Handelstage) umfaßt.

Der Zeithorizont T (vgl. Def. 3.1.1) umfaßt einen Tag. Für größere Zeiträume, z.B. Wochen, müssen die entsprechenden Kursdaten -z.B. wöchentliche Kurse- verwendet werden. Um diese größeren Vorhersagezeiträume durch wiederholtes Ausführen eines GARCH-Prozesses zu erhalten, müßten die relevanten Verteilungen analytisch miteinander korreliert werden, wie es bei der Normalverteilung mit Hilfe einer Cholesky Zerlegung der symmetrischen Varianz-Kovarianz-Matrix möglich ist. Dies bedeutet, wir müßten in diesem Fall auf die Normalverteilung zurückgreifen.

Die Einträge der nachfolgenden beiden Tabellen gelten für die transformierten und mittelwertbereinigten Renditen $y_t = \ln(x_t/x_{t-1}) - y^*$. Die ersten drei Parameter der t-Verteilung wurden historisch für die 40 Handelstage geschätzt.

3.5.2.1 Geschätzte Größen der t-Verteilungen und der Varianzprozesse

Stellparameter	μ	h_0	ν	γ	θ	ω
NYSE Index	$1.584 \cdot 10^{-3}$	$7.383 \cdot 10^{-5}$	7	$0.865 \cdot 10^{-5}$	0.07800	0.78125
Risk free rate	$-1.029 \cdot 10^{-3}$	$3.812 \cdot 10^{-5}$	5	$0.563 \cdot 10^{-5}$	0.23700	0.55200
Spot Rate 1y	$8.64 \cdot 10^{-5}$	$5.274 \cdot 10^{-5}$	20	$0.698 \cdot 10^{-5}$	0.16400	0.68550
Spot Rate 2y	$4.12 \cdot 10^{-4}$	$7.769 \cdot 10^{-5}$	10	$1.945 \cdot 10^{-5}$	0.09141	0.61797

Die Stellparameter sollen von $t_0=02.03.98$ ausgehend für $t_1=03.03.98$ simuliert werden. Nach Eintreffen der wirklichen Kurswerte vom 03.03.98, kann man dann mit diesen die Stellparameter für $t_2=04.03.98$ simulieren, usw. Für die Varianzwerte h_1 (Zeitpunkt t_1) und h_2 (Zeitpunkt t_2) verwenden wir die vom jeweiligen Varianzprozeß erzeugten Varianzen.

Ist z.B. y_{t1} die logarithmierte und mittelwertbereinigte Rendite und y^* der Schätzer für den Erwartungswert μ , dann gilt für die unten stehende Tabelle, daß sich der Kurs x_{t1} aus der Formel $x_{t0} \cdot \exp(y_{t1} + y^*)$ berechnet.

3.5.2.2 Daten

Größen	$t_0=02.03.98$ log. Rendite (Kurs)	$t_1=03.03.98$ log. Rendite (Kurs)	$t_2=04.03.98$ log. Rendite (Kurs)
NYSE Comp. Index (S)	$-9.04542 \cdot 10^{-4}$ (544.63)	$2.556887 \cdot 10^{-3}$ (546.89)	$-6.037341 \cdot 10^{-3}$ (544.46)
Risk free Rate (r_f)	$4.954 \cdot 10^{-3}$ (3.732%)	$3.315 \cdot 10^{-3}$ (3.741%)	$1.0219 \cdot 10^{-2}$ (3.775%)
Spot Rate 1y (s_1)	$-3.89099 \cdot 10^{-4}$ (5.569%)	$5.434709 \cdot 10^{-3}$ (5.600%)	$-5.045489 \cdot 10^{-3}$ (5.572%)
Spot Rate 2y (s_2)	$1.153822 \cdot 10^{-3}$ (5.663%)	$7.205694 \cdot 10^{-3}$ (5.706%)	$-7.190855 \cdot 10^{-3}$ (5.667%)
h_S (t_1, t_2 forecasted)	Wir simulieren in t_i mit den Varianzwerten von t_{i+1}	$6.639 \cdot 10^{-5}$	$6.103 \cdot 10^{-5}$
h_{r_f} (t_1, t_2 forecasted)		$3.249 \cdot 10^{-5}$	$2.622 \cdot 10^{-5}$
h_{s_1} (t_1, t_2 forecasted)		$4.316 \cdot 10^{-5}$	$4.141 \cdot 10^{-5}$
h_{s_2} (t_1, t_2 forecasted)		$6.759 \cdot 10^{-5}$	$6.597 \cdot 10^{-5}$
Forecast Für die 4 Stellparameter	je 300 korreliert simulierte Werte für t_1	je 300 korreliert simulierte Werte für t_2	

Für die direkte Eingabe in @Risk32 werden nun die historische Korrelationsmatrix und die verwendeten t-Verteilungen $t(\mu, h_t, v)$ aufgelistet.

3.5.2.3 Korrelationsmatrix

ρ_{ij}	S	r_f	s_1	s_2
S	1			
r_f	0.11420967	1		
s_1	0.28578285	0.53593696	1	
s_2	0.28121433	0.63396847	0.90574149	1

3.5.2.4 Verteilungen

t-Verteilungen	t ₁	t ₂
S	t(1.584*10 ⁻³ , 6.639*10 ⁻⁵ , 7)	t(1.584*10 ⁻³ , 6.103*10 ⁻⁵ , 7)
r _f	t(-1.029*10 ⁻³ , 3.249*10 ⁻⁵ , 5)	t(-1.029*10 ⁻³ , 2.622*10 ⁻⁵ , 5)
s ₁	t(8.64*10 ⁻⁵ , 4.316*10 ⁻⁵ , 20)	t(8.64*10 ⁻⁵ , 4.141*10 ⁻⁵ , 20)
s ₂	t(4.12*10 ⁻⁴ , 6.759*10 ⁻⁵ , 10)	t(4.12*10 ⁻⁴ , 6.597*10 ⁻⁵ , 10)

3.5.2.5 Portfolio

Das abzusichernde Finanzinstrument ist ein europäischer OTC-Call auf das 1000-fache des NYSE Composite Index. Der Call wurde am 01.03.98 etabliert und hat eine Laufzeit von zwei Jahren (360 Tage pro Jahr). Die B&S Formel für den Callpreis lautet:

3.5.2.5.1

$$F_1(S, r_f, t) = S * N(d_1) - X * \exp(-r_f * t) * N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + (r_f + 0.5 * h_0) * t}{\sqrt{h_0 * t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{h_0 * t}$$

- F₁(S, r_f, t) ist die erste Teilformel (vgl. 3.5 1)) und gibt den theoretischen Callpreis in Abhängigkeit der von uns simulierten Parameter und dem Zeitindex an³³.
- S ist der Kurs des Underlying (in unserem Fall 1000 mal der NYSE Composite Index)
- X ist der Ausübungspreis in Höhe von 545000\$.
- t ist die Restlaufzeit des Calls in Jahren. Am 03.03.98 gilt t=718/360 Jahre.
- r_f folgt dem risikofreien Zinssatz. In unserem Fall die „One Year DEM AAA Sovereign Par Rate“
- h₀ ist die konstante (historische) Varianz, siehe auch 3.5.2.1.
- N(x) ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

³³ Interessanterweise wurde die B&S Formel unter Annahme der Normalverteilung von S und eines konstanten risikofreien Zinssatzes r_f und einer konstanten Varianz hergeleitet. Ihrer weiten Verbreitung wegen, benutzen wir diese Formel, es gibt aber Alternativen, wie sie in <Copeland/Weston 1992> S. 279 ff vorgestellt werden.

Im Portfolio befindet sich der Bond US 9128272H4 als Collateral. Seine Laufzeit endet am 15.2.2000 und er hat einen Kupon von 5.875%. Außerdem nehmen wir einen Nominalwert von 1000\$ pro Bond an. Als Termin für die Zinszahlungen legen wir den 15.2. jeden Jahres fest. Daraus ergibt sich folgende Bewertungsformel (Barwertkonzept):

$$F_2(s_1, s_2, t) = - \left(\frac{0.05875 * 1000}{(1 + s_1)^{\frac{t-360}{360}}} + \frac{0.05875 * 1000 + 1000}{(1 + s_2)^{\frac{t}{720}}} \right)$$

- s_1 und s_2 sind die ein- und zweijährige US-Zerobondeffektivverzinsungen.
- t ist die Restlaufzeit des Bonds in Tagen. Am 03.03.98 hatten wir eine Restlaufzeit von 703 Tagen.

Das Minuszeichen ist notwendig, weil uns vom Counterpart Collaterale gestellt werden, die den Marktwert unseres Calls zum Nettoexposure verringern. Das Nettoexposure soll bei 0\$ liegen mit einer maximal zulässigen Abweichung von $\pm 10\%$ vom Callpreis des vorhergehenden Tages. Wird diese Grenze bei einem Szenario überschritten, müßten vom Counterpart zusätzlich Collaterale gestellt werden.

Am 02.03.98 hatte der Bond einen Börsenkurswert von 100.5% nominal (=1005\$). Und der OTC-Call hatte einen B&S-Preis von 38775.31\$. Der Counterpart stellte 39 Bonds und es verblieb uns ein Nettoexposure von 420\$. Dieser Wert liegt innerhalb der zulässigen Abweichung von $\pm 3877.53\%$. Die Abbildung der Verteilung des Nettoexposures auf der nächsten Seite, zeigt aber auch, daß der mögliche Marktwert des nächsten Tages mit einer Wahrscheinlichkeit³⁴ von ca. 19% oberhalb der Intervallgrenze 3877.53\$ liegen wird. Der Counterpart muß uns in einem solchen Fall zusätzliche Collaterale stellen.

Die resultierende Bewertungsformel des Nettoexposures lautet demnach:

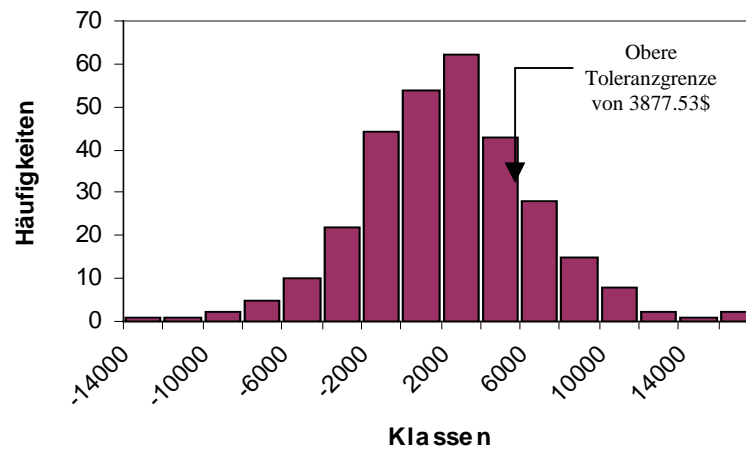
$$F(S, r_f, t_{\text{Call}}, s_1, s_2, t_{\text{Bond}}) = F_1(S, r_f, t_{\text{Call}}) + 39 * F_2(s_1, s_2, t_{\text{Bond}})$$

³⁴ Der Wert 19% folgt aus der durch Simulation entstandenen Wertetabelle, mit deren Werten Abb. 3.5.3.1 erzeugt wurde. Aus der Abb. 3.5.3.1 selbst ließe sich nur auf eine Wahrscheinlichkeit zwischen 25 und 15 Prozent schließen.

3.5.3 Ergebnisse

Untenstehende Abbildung zeigt die Verteilung des simulierten Nettoexposures F von $t_1=03.03.98$:

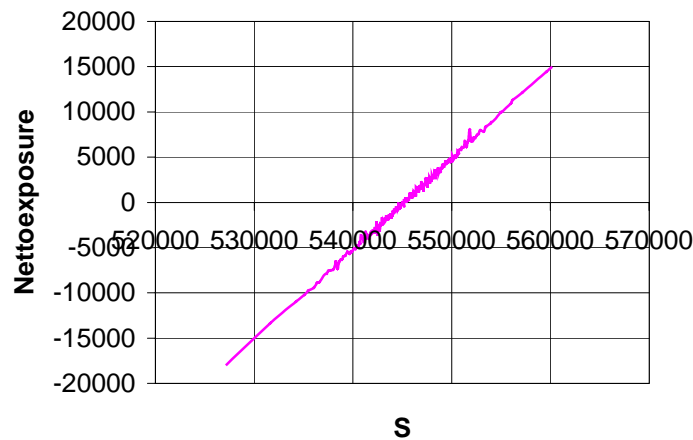
3.5.3.1 Abb. Simulierte Verteilung des Nettoexposures



Der **Value at Risk** zum 03.03.1998, $\text{VaR}(P, 0.025, 1 \text{ Tag})$, beträgt **9114.61\$**. Dies entspricht dem 97.6% Quantil der simulierten Datenreihe.

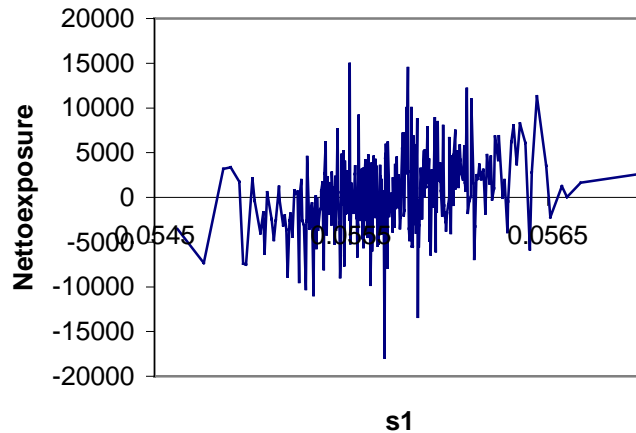
Wir kommen jetzt zu Punkt 6) von Kapitel 3.5 und berechnen die Sensitivität des Portfolios gegenüber Änderungen des NYSE Composite Index und der einjährigen Spot Rate. Die beiden Abbildungen zeigen den Portfoliowert in Abhängigkeit der Stellparameter S und s_1 .

Abb. 3.5.3.2 Abhängigkeit des Nettoexposures vom Underlying S



Die Kurve verläuft deshalb linear, weil wir uns mit S schon in dem „fast linearen“ Bereich der exponentiell verlaufenden Callkurve (vgl. 3.5.2.5.1) befinden.

3.5.3.3 Abhängigkeit des Nettoexposures von der Spot Rate s_1



Die Stellparameter s_2 und r_f zeigten ähnliches Verhalten wie s_1 . Das Underlying S hat die größte Bedeutung für die Änderung des Nettoexposures. Die geringen Abweichungen vom linearen Trend, die von abweichenden Werten der anderen Stellparameter verursacht werden, zeigen dies. Mit ansteigendem Wert des Underlyings S steigt der Wert der OTC-Option und damit das Nettoexposure (bei konstantem Bondwert).

In Abhängigkeit des Stellparameters s_1 weist das Nettoexposure derart starke Abweichungen von seinem positiven Grundtrend auf, daß dies schon fast an „Unabhängigkeit“ grenzt. Die starken Abweichungen zeigen, daß andere signifikante Einflußfaktoren existieren. Der positive Grundtrend ist plausibel, da mit steigendem Zins s_1 auch s_2 steigt (Korrelation 0.91) und die Cash Flows des Bonds dann mit höheren Zinsen abdiskontiert werden. Der Bond wird dadurch weniger wert und bei konstantem Marktwert der OTC-Option, steigt unser Nettoexposure bzw. der Portfoliowert. Wir müssen bei einer solchen Interpretation jedoch die Korrelation zwischen s_1 und S berücksichtigen (0.28). Eine sehr negative Korrelation, z.B. -0.9 , zwischen diesen beiden Stellparametern hätte durchaus einen negativen Grundtrend des Nettoexposures in Abhängigkeit von Stellparameter s_1 , verursachen können! Dies geschieht, weil die Korrelationen der Stellparameter untereinander berücksichtigt werden (siehe auch 3.5 6)).

Die Tabelle zeigt die Korrelationsmatrix der simulierten Stellparameter und des Nettoexposures NE. Ein Vergleich mit der eingegebenen Korrelationsmatrix 3.5.2.3 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

ρ_{ij}	S	r_f	s_1	s_2	NE
S	1				
r_f	0.10943877	1			
s_1	0.29000956	0.51210616	1		
s_2	0.30163903	0.62279679	0.90487723	1	
NE	0.99860269	0.16152753	0.3189519	0.33651593	1

Die Korrelationsmatrix zeigt das s_1 und NE stärker korreliert sind als s_1 und S.

3.5.4 Methodenvergleich

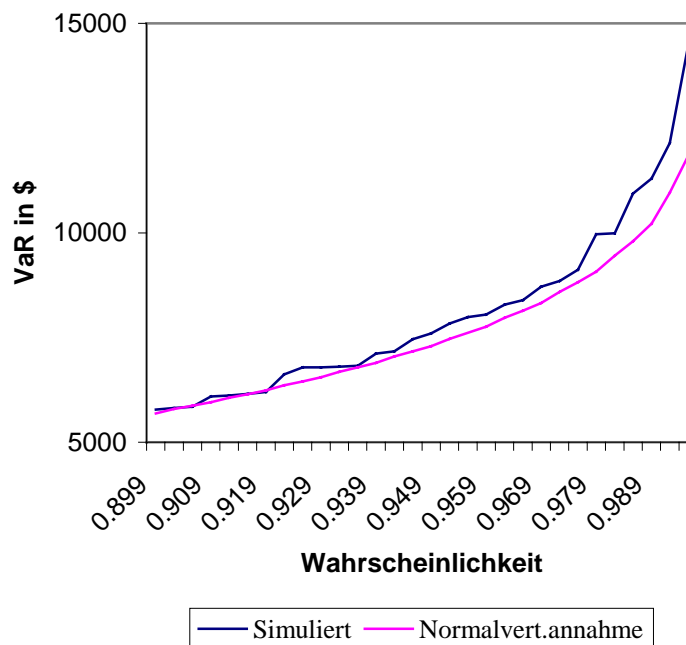
Abschließend folgt noch ein kleiner Methodenvergleich zwischen dem $\text{VaR}(P, \alpha, T)$, berechnet durch unsere Simulationsmethode und einem einfacheren Ansatz.

Betrachten wir die Abb. 3.5.3.1, dann könnte, bei diesem Beispielportfolio, auch eine Normalverteilung geeignet sein, den VaR zu berechnen. Bei Normalverteilungsannahme läßt sich der VaR durch

$$\text{VaR}(P, \alpha, T) = \sqrt{h} * N^{-1}(1 - \alpha) \quad \alpha \in (0, 1)$$

ermitteln. Dabei ist h die Varianz und $N(x)$ die Verteilungsfunktion der entsprechenden Normalverteilung. Die Varianz h folgt aus den Daten der Abbildung 3.5.3.1, was bedeutet, daß sie durch Simulation ermittelt wurde. Das wäre in diesem Fall auch nicht anders möglich, weil die OTC-Option nur zwei Tage alt ist und noch keine historischen Daten vorliegen. Nach längerer Laufzeit könnte die Varianz auch historisch geschätzt werden.

3.5.4.1 Abb. VaR-Vergleich



Man sieht, die einfache Normalverteilungsannahme zeigt im relevanten Bereich einen deutlich niedrigeren VaR als die Simulationsmethode an. Mit anderen Worten, im Vergleich mit der Simulationsmethode, unterschätzt die Normalverteilung den VaR.

4. Schluß

Beide Aufgaben, Portfoliooptimierung und Value at Risk, wiesen gänzlich unterschiedliche Probleme auf.

Für die Portfoliooptimierung des Collateralised Trading liegt bisher keinerlei Literatur vor. Dies liegt daran, daß Collateralised Trading von den Banken gerade erst eingeführt wird. Die Banken müssen bisher noch die operative Seite, die tägliche Abwicklung, des Geschäftes in den Griff bekommen. Dazu gehört funktionierende und auf die jeweiligen Anforderungen abgestimmte Software, die dies leistet.

Es mußte zuerst ein Portfoliomodell gefunden werden, welches in der Lage ist die ökonomischen Vorgänge des Collateralised Trading abzubilden und mit dem die Optimierung leicht durchführbar ist. Danach mußten konkrete Regeln des Collateralised Trading in lineare Restriktionen transformiert werden. Hier sind zuverlässige Software und Datenbanken notwendig, welche die benötigten Daten bereitstellen. Bei der konkreten Portfoliooptimierung zeigte sich wie wichtig ein gutes Recording historischer Kursdaten ist.

Der Value at Risk wurde in der Literatur schon ausführlich behandelt und es existiert eine große Anzahl von Methoden. Das Problem war, eine geeignete Auswahl zu treffen und die gewählte Methode an die Erfordernisse des Collateralised Trading anzupassen, da speziell dafür noch kein Value at Risk-Ansatz existierte.

Auf einige interessante Aspekte geht diese Diplomarbeit nicht ein. So könnte bei der Berechnung des *Value at Risk* noch der Fehler in Abhängigkeit der Anzahl der Szenarien untersucht werden. Auch ein Vergleich zwischen reiner Monte Carlo Simulation und der Simulation mittels Stratified Sampling wäre interessant. Außerdem sollte man nach weiteren Methoden suchen, die nicht normalverteilte Verteilungen miteinander korrelieren. Eine weitere Herausforderung ist die Wahl oder Herleitung des Bewertungsmodells, wenn es darum geht neue Finanzinstrumente in ein Portfolio einzuführen. Was die *Portfoliooptimierung* betrifft, so bestünde die Möglichkeit heuristische Optimierungsmethoden zu überprüfen, die zwar nur Näherungslösungen liefern aber den Aufwand bezüglich Rechnerleistung und Algorithmus reduzieren.

Insgesamt waren beide Aufgabengebiete äußerst interessant und herausfordernd.